BEITRÄGE ZUR THEORIE
DER
DARSTELLUNG DER STETIGEN FUNKTIONEN
DURCH REIHEN VON GANZEN RATIONALEN FUNKTIONEN.

INAUGURALDISSERTATION

DER HOHEN PHILOSOPHISCHEN FAKULTÄT
DER VEREINIGTEN FRIEDRICHS-UNIVERSITÄT HALLE-WITTENBERG

ZUR ERLANGUNG DER DOKTORWÜRDE

VORGELEGT VON

PAUL LEHMANN
AUS DRESDEN.

HALLE A. S. 1910.
DRUCK VON B. G. TEUBNER IN DRESDEN.

Referent:

Herr Geheimer Regierungsrat Professor Dr. **A. Wangerin.**

MEINEM VEREHRTEN LEHRER

HERRN GEHEIMEN HOFRAT Dr. M. KRAUSE

ORDENTL. PROFESSOR FÜR MATHEMATIK

AN DER KÖNIGL. TECHNISCHEN HOCHSCHULE ZU DRESDEN

IN VEREHRUNG UND DANKBARKEIT

GEWIDMET

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41548101_0123

Inhaltsverzeichnis.

Seite

Einleitung 6

§ 1. Darstellung mit Hilfe der Kugelfunktionen 11

§ 2. Entwicklung nach den zugeordneten Funktionen . . . 14

§ 3. Lösung des Problems mit Hilfe der verallgemeinerten Kugelfunktionen 20

§ 4. Lösung des Problems mit Hilfe der Jacobischen Polynome 28

§ 5. Entwicklung nach den Polynomen von Hermite . . . 36

§ 6. Die T-Funktionen und ihre Anwendung auf unser Problem 42

§ 7. Darstellung der Funktion $\varphi_{pq}(x)$ durch trigonometrische Funktionen 46

§ 8. Verallgemeinerung der Borelschen Interpolationsformel. 54

§ 9. Zusammenhang der Borelschen Methode der Darstellung stetiger Funktionen mit den von anderen Autoren angewandten Methoden 56

Anhang. Tabelle der bei der Entwicklung nach Kugelfunktionen auftretenden Koeffizienten $c_n^{(pq)}$ 62

Einleitung.

Das Problem, willkürliche Funktionen durch Reihen von Polynomen analytisch darzustellen, ist seit Weierstraß[1]) schon oft der Gegenstand von Untersuchungen gewesen. Weierstraß hatte für die reellen Funktionen zuerst einen einwandfreien Beweis dafür gegeben, daß eine solche Darstellung möglich ist; seitdem sind noch eine Anzahl anderer Beweise von verschiedenen Mathematikern gegeben worden, von denen hier genannt seien die Arbeiten von Picard[2]), Lerch[3]), Runge[4]), Volterra[5]), Mittag-Leffler[6]), Lebesgue[7]), Landau[8]), Fejér[9]).

Das fundamentale Resultat aller dieser Arbeiten läßt sich folgendermaßen aussprechen:

„Versteht man unter $f(x)$ eine im Intervalle (a, b) definierte stetige Funktion der reellen Veränderlichen x, so kann man ein Polynom $P(x)$ immer derart bestimmen, daß für jeden Wert von x in diesem Intervalle die Ungleichung besteht:

$$|f(x) - P(x)| < \varepsilon,$$

wobei unter ε eine beliebig klein vorgelegte positive Größe zu verstehen ist."

Bezeichnen wir insbesondere mit $P_n(x)$ das dem Werte $\frac{1}{n^2}$ von ε entsprechende Polynom, so konvergiert offenbar die Reihe:

$$(S) \quad P_1(x) + \big(P_2(x) - P_1(x)\big) + \big(P_3(x) - P_2(x)\big) + \cdots + \big(P_n(x) - P_{n-1}(x)\big) + \cdots$$

gleichmäßig gegen $f(x)$ in dem vorgelegten Intervalle (a, b). Die Konvergenz ist ferner eine absolute.

---

1) Weierstraß, Berliner Sitzungsberichte 1885.
2) Picard, Traité d'analyse. Bd. 1, S. 256.
3) Lerch, Acta mathematica. Bd. 27, S. 339
4) Runge, Acta mathematica. Bd. 7, S. 387.
5) Volterra, Rendiconti del Circolo matematico di Palermo 1897. S. 83.
6) Mittag-Leffler, Rendiconti del Circolo etc. 1900.
7) Lebesgue, Bulletin des Sciences mathématiques (1898), S. 278.
8) Landau, Rendiconti del Circolo matematico di Palermo. Bd. 25. (1908.)
9) Fejér, Mathematische Annalen. Bd. 58.

Ohne auf die in den Arbeiten der genannten Autoren enthaltenen Beweise für diesen fundamentalen Satz näher eingehen zu wollen, wollen wir uns vielmehr der Aufgabe zuwenden, für die Polynome $P(x)$ geeignete Darstellungen zu finden. Auch diese Aufgabe ist schon öfters von verschiedenen Seiten aus behandelt worden und bildet den Ausgangspunkt für eine Fülle von Arbeiten. Hingewiesen werde hier vor allen Dingen auf die aus der Theorie der Integralgleichungen bekannten Eigenfunktionen und ihre Verwendung zur Entwicklung willkürlicher Funktionen; man vergleiche hierzu die grundlegenden Arbeiten von E. Schmidt[1]) und die in den letzten Jahren im Anschluß an diese Arbeiten geführten Untersuchungen, die zum größten Teile in den Mathematischen Annalen erschienen sind. Desgleichen ist an dieser Stelle der Arbeiten von A. Kneser[2]) zu gedenken, welche die Darstellung willkürlicher Funktionen durch die Sturm-Liouvilleschen Normalfunktionen behandeln.

In der vorliegenden Arbeit soll nun gezeigt werden, wie man auf ganz anderem Wege zur Darstellung stetiger Funktionen gelangen kann, wenn man dabei die Interpolationstheorie verwendet.

Die Aufgabe der Interpolation besteht ja bekanntlich darin, eine Funktion $f(x)$ möglichst angenähert zu berechnen, wenn man die Werte kennt, die sie in einer Anzahl von Werten ihrer Veränderlichen annimmt. Dieses Problem führt häufig dazu, wie z. B. die Lagrangesche Interpolationsformel, für $f(x)$ als angenäherte Funktion zu wählen einen Ausdruck von der Form:

$$(1) \qquad P_q(x) = \sum_{p=0}^{q} f\left(\frac{p}{q}\right) P_{pq}(x),$$

wenn man der Einfachheit halber das Intervall (0, 1) zu Grunde legt. Die Polynome $P_{pq}(x)$ sind dabei von der Funktion $f(x)$ selbst ganz unabhängig. Bei der Lagrangeschen Interpolationsformel ist insbesondere:

$$P_{pq}(x) = \frac{(x-0)\left(x-\frac{1}{q}\right)\left(x-\frac{2}{q}\right)\cdots\left(x-\frac{p}{q}\right)\cdots(x-1)}{\left(\frac{p}{q}-0\right)\left(\frac{p}{q}-\frac{1}{q}\right)\left(\frac{p}{q}-\frac{2}{q}\right)\cdots\left(\frac{p}{q}-\frac{p-1}{q}\right)\left(\frac{p}{q}-\frac{p+1}{q}a\right)\cdots\left(\frac{p}{q}-1\right)}.$$

Unter der Annahme, daß $f(x)$ in dem betrachteten Intervalle eine stetige Funktion von x ist — diese Annahme wollen wir von jetzt an immer machen —, wird man $f(x)$ nach dem Satze von Weierstraß durch eine Reihe von Polynomen approximieren können. Es drängt sich uns nun die Frage auf, ob die Reihe (1) gleichmäßig konvergiert oder nicht? Es haben

1) E. Schmidt, Zur Theorie der linearen und nichtlinearen Integralgleichungen. Math. Annalen Bd. 63 (1907).

2) A. Kneser, Darstellung willkürlicher Funktionen; Math. Annalen Bd. 58 S. 81, Bd. 60 S. 402, Bd. 63 S. 477.

nun zuerst Runge[1]) und unabhängig von ihm E. Borel[2]) darauf aufmerksam gemacht und an verschiedenen Beispielen gezeigt, daß durch die Lagrangesche Interpolationsformel keineswegs immer eine Annäherung erreicht wird, die mit wachsender Zahl der Zwischenpunkte auch immer größer wird. Es findet vielmehr das Gegenteil statt. Für den Fall der Lagrangeschen Interpolationsformel konvergiert also die Reihe (1) nicht gleichmäßig.

Diese Tatsache nun veranlaßte Borel[3]) zu der Frage, ob es denn nicht möglich sei, eine der Formel (1) analoge

$$\Pi_q(x) = \sum_{p=0}^{p=q} f\left(\frac{p}{q}\right) \Pi_{p,q}(x) \tag{2}$$

zu erhalten, in der die Funktionen $\Pi_{pq}(x)$ so gewählt sind, daß (2) das Weierstraßsche Theorem erfüllt. Er stellt im Anschluß daran eine solche Interpolationsformel wirklich auf, die die verlangten Eigenschaften besitzt. Die Funktionen $\Pi_{pq}(x)$ hängen dabei von den Werten der Funktion $f(x)$ in keiner Weise ab, sind jedoch etwas weniger einfach wie die von Lagrange.

Borel verfährt folgendermaßen. Unter der Annahme, daß q eine beliebige ganze positive Zahl und p eine der Zahlen $1, 2, \cdots q-1$ ist, werde eine Funktion $\varphi_{pq}(x)$ in dem Intervalle $(0, a)$ definiert durch folgende Gleichungen:

$$\begin{cases} \varphi_{pq}(x) = 0 & \text{für } 0 \leqq x \leqq \frac{p-1}{q} a \\ \varphi_{pq}(x) = qx - (p-1)a & \text{für } \frac{(p-1)a}{q} \leqq x \leqq \frac{pa}{q} \\ \varphi_{pq}(x) = -qx + (p+1)a & \text{für } \frac{pa}{q} \leqq x \leqq \frac{p+1}{q} a \\ \varphi_{pq}(x) = 0 & \text{für } x \geqq \frac{p+1}{q} a. \end{cases} \tag{3}$$

Für die Intervalle $\left(0, \frac{a}{q}\right)$ und $\left(\frac{q-1}{q} a, a\right)$ soll die Funktion $\varphi_{pq}(x)$ definiert sein durch die Gleichungen:

$$\begin{cases} \varphi_{oq}(x) = a & \text{für } x = 0 \\ \varphi_{oq}(x) = -qx + a & \text{für } 0 \leqq x \leqq \frac{a}{q} \\ \varphi_{oq}(x) = 0 & \text{für } x \geqq \frac{a}{q} \end{cases} \tag{3'}$$

1) Runge, Über empirische Funktionen und die Interpolation zwischen äquidistanten Intervallen. Zeitschr. für Math. u. Physik Bd. 66 (1901) S. 229.

2) Borel, Leçons sur les fonctions de variables réelles etc. Paris 1905. S. 74.

3) Borel, loc. cit. S. 79; siehe auch: Bericht über die Verhandlungen des III. internationalen Mathematiker-Kongresses zu Heidelberg, S. 229.

und

$$(3'') \quad \begin{cases} \varphi_{qq}(x) = 0 & \text{für } 0 \leqq x \leqq \frac{q-1}{q}a \\ \varphi_{qq}(x) = qx - (q-1)a & \text{für } \frac{q-1}{q}a \leqq x \leqq a. \end{cases}$$

Setzt man:

$$(4) \quad \varphi_q(x) = \frac{1}{a}\sum_0^q{}_p f\left(\frac{pa}{q}\right)\varphi_{pq}(x),$$

so stellt die Reihe:

$$(5) \quad f(x) = \varphi_1(x) + \sum_2^\infty{}_q[\varphi_q(x) - \varphi_{q-1}(x)]$$

im Intervalle $(0, a)$ die Funktion $f(x)$ dar. Kann man dann Polynome $P_{pq}(x)$ derart bestimmen, daß im vorgelegten Intervalle stets die Ungleichung stattfindet:

$$| \varphi_{pq}(x) - P_{pq}(x) | < \frac{1}{q^2},$$

so wird $f(x)$ im Intervalle $(0, a)$ zweitens durch folgende Reihe dargestellt:

$$(6) \quad f(x) = \Pi_1(x) + \sum_2^\infty{}_q[\Pi_q(x) - \Pi_{q-1}(x)],$$

worin gesetzt ist:

$$(7) \quad \Pi_q(x) = \frac{1}{a}\sum_0^q{}_p f\left(\frac{pa}{q}\right) P_{pq}(x).$$

In beiden Fällen ist die Darstellung von $f(x)$ eine gleichmäßige.

Krause*) hat nun diese Borelsche Formel dazu benutzt, um stetige Funktionen durch Reihen von ganzen rationalen Funktionen darzustellen.

Sei $g_1(x)$, $g_2(x)$, ... $g_n(x)$ ... ein System von Funktionen, die zur Entwicklung stetiger Funktionen dienen können. Aus den mannigfachen Systemen dieser Art wollen wir nun diejenigen herausgreifen, mit deren Hilfe wir $\varphi_{pq}(x)$ im Intervalle $(0, a)$ in eine gleichmäßig konvergente Reihe entwickeln können. Man erhält dann:

$$(8) \quad \varphi_{pq}(x) = \sum_0^\infty{}_n c_n^{(pq)} g_n(x).$$

Dann wird sich immer eine positive ganze Zahl m so bestimmen lassen, daß für alle Werte von x im vorgelegten Intervalle $(0, a)$ die Reihe:

*) Krause, M., Über die Darstellung der stetigen Funktionen durch Reihen von ganzen rationalen Funktionen. Berichte der Verh. der Königl. Sächs. Ges. d. Wissensch. Bd. 58 (1906).

Krause, M., Über die Darstellung der stetigen Funktionen; Jahresbericht d. Deutsch. Mathematiker-Vereinigung, 16. Bd. (1907).

$$\sum_{m+1}^{\infty} {}_n c_n^{(pq)} g_n(x)$$

dem absoluten Betrage nach kleiner ist als $\frac{1}{q^2}$. Setzt man also:

$$P_{pq}(x) = \sum_{0}^{m} {}_n c_n^{(pq)} g_n(x), \tag{9}$$

so hat man mit $P_{pq}(x)$ eine ganze rationale Funktion gefunden, die der obigen Ungleichung genügt.

Da sich nun solche Funktionen $P_{pq}(x)$ ein für allemal unabhängig von der jeweiligen Funktion berechnen lassen, so erkennt man, welchen Vorteil die Borelsche Interpolationsformel für die Interpolation bietet. Anderseits läßt sich diese Formel dazu verwenden, um beliebige stetige Funktionen $f(x)$ in eigenartiger Weise durch Reihen darzustellen, deren einzelne Glieder Summen von ganzen rationalen Funktionen sind.

Es sollen nun im folgenden zunächst verschiedene Darstellungen für die Funktionen $P_{pq}(x)$ gegeben werden. In der erstgenannten Arbeit von Krause sind diese Funktionen durch ultra-bernoullische Funktionen, sowie durch die gewöhnlichen Legendreschen Kugelfunktionen dargestellt worden. Wir lassen zunächst die Darstellungen mit Hilfe der zugeordneten Kugelfunktionen (1. Art.) $P_n^{\nu}(x)$, der allgemeinen Kugelfunktionen $C_n^{\nu}(x)$ und der Jacobischen Polynome $X_n(x)$ folgen. Hieran schließen sich dann die Entwicklungen der Funktion $\varphi_{pq}(x)$ mit Hilfe der für ein unendlich großes Intervall definierten Polynome — der sogenannten U-Funktionen [Hermitesche Polynome] — und der T-Funktionen Sonins, und zum Schluß sollen die Entwicklungen nach trigonometrischen Funktionen gegeben werden. In einem folgenden Abschnitte soll die Borelsche Funktion für beliebige Zwischenpunkte x_p definiert werden und dann der Zusammenhang dieser Methode mit anderen Methoden, die zum Teil in den oben angeführten Arbeiten, die Darstellungen stetiger Funktionen betreffend, angewandt sind, gezeigt werden.

§ 1.

Darstellung mit Hilfe der Kugelfunktionen.

Wir beginnen mit der Darstellung durch die Kugelfunktionen, die zwar zum Teil bereits in der erstgenannten Arbeit von Krause*) gegeben ist, jedoch hier in Rücksicht auf die folgenden Entwicklungen, von denen sie ein Spezialfall ist, zur Vergleichung kurz angeführt werden soll.

Unter der Annahme, daß a eine positive Größe und kleiner als 1 ist, lautet die Entwicklung der Funktion $\varphi_{pq}(x)$ nach Kugelfunktionen innerhalb des Intervalles $(0, a)$:

$$\varphi_{pq}(x) = \sum_0^\infty{}_n c_n^{(pq)} P_n(x), \tag{1}$$

und es ist dabei zu setzen:

$$\frac{2}{2n+1} c_n^{(pq)} = \int_{\frac{p-1}{q}a}^{\frac{pq}{q}} \left(qx - (p-1)a\right) P_n(x)\,dx + \int_{\frac{pa}{q}}^{\frac{p+1}{q}a} \left(-qx + (p+1)a\right) P_n(x)\,dx.$$

Mit Hilfe der bekannten Formeln:

$$\int P_n(x)\,dx = \frac{x P_n(x) - P_{n-1}(x)}{n+1}$$

$$\int x P_n(x)\,dx = \frac{\left((n-1)x^2+1\right) P_n(x) - n x P_{n-1}(x)}{(n-1)\cdot(n+2)}$$

läßt sich $c_n^{(pq)}$ berechnen; man erhält:

$$\frac{2}{2n+1} c_n^{(pq)} = \frac{1}{n+2}\left\{ A_{p-1} - 2A_p + A_{p+1} \right\}, \tag{2}$$

mit der Abkürzung:

$$A_r = \frac{1}{q} P_n\left(\frac{r\cdot a}{q}\right)\left[\frac{r^2a^2}{n+1} - \frac{q^2}{n-1}\right] + 2\, P_{n-1}\left(\frac{ra}{q}\right)\frac{ra}{n^2-1^2}.$$

Es ergibt sich insbesondere für $p = 0$:

$$\varphi_{0q}(x) = \sum_0^\infty{}_n c_n^{(0q)} P_n(x), \tag{1'}$$

*) Krause, a. a. O. § 3.

$$(2') \qquad \frac{2}{2n+1} c_n^{(pq)} = \frac{1}{n+2} \left\{ -A_0' + A_1 \right\},$$

wobei zu setzen ist:

$$A_0' = A_0 - \frac{n+2}{n+1} a P_{n-1}(0).$$

Für $p = q$ folgt:

$$(1'') \qquad \varphi_{qq}(x) = \sum_0^\infty {}_n c_n^{(qq)} P_n(x)$$

mit:

$$\frac{2}{2n+1} c_n^{(qq)} = \int_{\frac{q-1}{q}a}^{a} \left(qx - (p-1)a\right) P_n(x)\, dx$$

$$(2'') \qquad = \frac{1}{n+2} \left\{ A_{q-1} - A_q + a(n+2) \int P_n(a)\, da \right\}.$$

Um den Koeffizienten $c_n^{(pq)}$ eine ihre numerische Berechnung etwas erleichternde Gestalt zu geben, transformiert man den Ausdruck (2) bez. (2'), (2'') auf folgende Weise. Man entwickelt $P_n\left(\frac{p-1}{q}a\right)$, $P_n\left(\frac{p+1}{q}a\right)$, $P_{n-1}\left(\frac{p-1}{q}a\right)$, $P_{n-1}\left(\frac{p+1}{q}a\right)$ je nach dem Taylorschen Lehrsatze und setzt dann die bez. Reihen in die Ausdrücke (2) ein. Setzt man dann zur Abkürzung

$$\frac{pa}{q} = x,$$

wobei natürlich dieses x nicht die Variable in (1) ist, so wird der Koeffizient von $a\left(\frac{a}{q}\right)^{2r+1}$ in:

$$\frac{n+2}{2n+1} c_n^{(pq)}$$

gleich dem folgenden Ausdruck:

$$x^2 \frac{P_n^{(2r+2)}(x)}{2r+2!(n+1)} - \frac{P_n^{(2r+2)}(x)}{2r+2!(n-1)} + 2x \frac{P_n^{(2r+1)}(x)}{2r+1!(n+1)} + \frac{P_n^{(2r)}(x)}{2r!(n+1)}$$
$$+ 2x \frac{P_{n-1}^{(2r+2)}}{2r+2!(n^2-1^2)} + 2 \frac{P_{n-1}^{(2r+1)}(x)}{2r+1!(n^2-1^2)}.$$

Unter Berücksichtigung der beiden Gleichungen:

$$P_{n-1}^{(r)}(x) = x P_n^{(r)}(x) - (n - r + 1) P_n^{(r-1)}(x)$$

und

$$(1-x^2) P_n^{(2r+2)}(x) - 2x(2r+1) P_n^{(2r+1)}(x) + [n(n+1) - 2r(2r+1)] P_n^{(2r)}(x) = 0,$$

geht dieser Ausdruck in den folgenden über:

$$\frac{(n+1)[(n+1)n - (2r+1)2r + (2r+2)(2r-1)]}{2r+2!(n^2-1^2)} P_n^{(2r)}(x) = \frac{n(n+1)-2}{2r+2!(n-1)} P_n^{(2r)}(x).$$

Daraus folgt:

$$c_n^{(pq)} = (2n+1)\,a \sum_0^r \frac{P_n^{(2r)}(x)}{2r+2!} \cdot \left(\frac{a}{q}\right)^{2r+1}. \tag{3}$$

Wenn man jetzt eine ganze Funktion von x vom Grade $(n+2)$ durch die folgende Gleichung definiert:

$$R_n''(x) = P_n(x) \tag{4}$$

so ist $R_n(x)$ hierdurch offenbar bis auf eine lineare Funktion von x bestimmt, die für das folgende aber ohne Belang ist und daher gleich Null gesetzt werden kann.

Dann läßt sich $c_n^{(pq)}$ schreiben:

$$c_n^{(pq)} = \frac{2n+1}{2} \cdot a \cdot \left(\frac{q}{a}\right)\left\{R_n\left(\frac{p-1}{q}a\right) - 2R_n\left(\frac{pa}{q}\right) + R_n\left(\frac{p+1}{q}a\right)\right\}. \tag{5}$$

Wenn man mit ϑ und ϑ' zwei Größen bezeichnet, die zwischen 0 und 1 gelegen sind, so kann man auch schreiben:

$$c_n^{(pq)} = \frac{2n+1}{2} \cdot a \cdot \left(\frac{a}{q}\right) \cdot \frac{P_n\left(\frac{p-\vartheta}{q}a\right) + P_n\left(\frac{p+\vartheta'}{q}a\right)}{2}. \tag{6}$$

Um nun die Konvergenz der Entwicklung (1) zu untersuchen, beachten wir, daß mit wachsenden Werten von n die Kugelfunktion $P_n(\cos\vartheta)$ sich dem asymptotischen Werte nähert:

$$P_n(\cos\vartheta) = \sqrt{\frac{2}{n\pi\sin\vartheta}}\sin\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)\vartheta + \frac{\pi}{4}\right].$$

Sie wird also mit wachsendem Werte von n sich von der Ordnung $\frac{1}{2}$ der Null nähern.

Die Konstanten $c_n^{(pq)}$ zerfallen nun in zwei Teile. Der eine Teil, den wir mit $\gamma_n^{(pq)}$ bezeichnen wollen, enthält nur Kugelfunktionen mit dem Index $(n-1)$. Der gemeinsame Faktor dieses Teiles lautet:

$$\frac{2n+1}{(n+1)(n^2-1^2)};$$

er wird also von der 2. Ordnung unendlich klein, wenn n unendlich groß wird. Damit aber folgt, daß sich ein Wert m von n immer so bestimmen läßt, daß die Summe:

$$\sum_{m+1}^{\infty} {}_n\gamma_n^{(pq)} P_n(x)$$

für alle in Betracht kommenden Werte p und x dem absoluten Betrage nach kleiner ist als $\frac{1}{q^2}$.

Der andere Teil von $c_n^{(pq)}$, den wir mit $\delta_n^{(pq)}$ bezeichnen wollen, enthält nur Kugelfunktionen mit dem Index n. Diese werden von der

$\frac{1}{2}$ten, δ daher von der $\frac{3}{2}$ten Ordnung unendlich klein, wenn n unendlich groß wird. Hieraus folgt, daß sich auch hier eine Zahl m so bestimmen läßt, daß die Summe:

$$\sum_{m+1}^{\infty} {}_n\delta_n^{(pq)} P_n(x)$$

für alle in Betracht kommenden Werte von p und x dem absoluten Betrage nach kleiner als $\frac{1}{q^2}$ ist, denn die Glieder derselben werden von der 2. Ordnung unendlich klein.

Es folgt der **Lehrsatz.**

Es läßt sich eine ganze positive Zahl m so bestimmen, daß die ganze rationale Funktion:

$$P_{pq}(x) = \sum_{0}^{m} {}_n c_n^{(pq)} P_n(x)$$

im Intervalle von 0 bis a die Funktion

$$\varphi_{pq}(x)$$

mit der gegebenen Annäherung

$$\frac{2}{q^2}$$

darstellt.

§ 2.

Entwicklung nach zugeordneten Kugelfunktionen.

Als zugeordnete Kugelfunktionen*) werden bekanntlich die Funktionen bezeichnet, die bei der Entwicklung der in dem Laplaceschen Integrale für die Kugelfunktion auftretenden Funktion $\left[x + \cos\varphi\sqrt{x^2-1}\right]^n$ in eine nach den Kosinus der Vielfachen von φ fortschreitende Reihe als Koeffizienten auftreten. Bezeichnet man sie mit $P_n^{\nu}(x)$, so ist:

$$P_n^{\nu}(x) = \frac{(n-\nu)!}{(2n)!}\sqrt{x^2-1}^{\nu}\frac{d^{n+\nu}(x^2-1)^n}{dx^{n+\nu}} = \frac{(n-\nu)!}{1\cdot 3\cdots(2n-1)}\sqrt{x^2-1}^{\nu}\frac{d^{\nu}P_n(x)}{dx^{\nu}}.$$

Dabei ist ν positiv und kleiner als n angenommen. Danach ist also:

$$P_n^{\nu}(x) = \sqrt{x^2-1}^{\nu}\left\{x^{n-\nu} - \frac{(n-\nu)(n-\nu-1)}{2\cdot(2n-1)}x^{n-\nu-2}\right.$$
$$\left. + \frac{(n-\nu)(n-\nu-1)(n-\nu-2)(n-\nu-3)}{2\cdot 4\cdot(2n-1)\cdot(2n-3)}x^{n-\nu-4} - \cdots\right\}.$$

*) Man vgl. Wangerin, Theorie der Kugelfunktionen und verwandten Funktionen. Enzyklopädie der math. Wissenschaften Bd. 2, S. 695f.; Heine, Handbuch der Kugelfunktionen 2. Aufl. 1. Bd.

Ferner ist zu bemerken, daß:

$$P_n^0(x) = \frac{n!}{1 \cdot 3 \cdots (2n-1)} P_n(x); \quad P_n^n(x) = (x^2-1)^{\frac{n}{2}};$$
$$P_n^\nu(x) = 0 \quad \text{für } \nu > n, \quad P_n^\nu(x) = P_n^{-\nu}(x) \quad \text{für } \nu \leqq n.$$

Wir wollen weiter die mit $(x^2-1)^{\frac{\nu}{2}}$ multiplizierte Funktion $P_n^\nu(x)$ durch $\mathfrak{P}_n^\nu(x)$ bezeichnen; dann ist:

$$\mathfrak{P}_n^\nu(x) = (x^2-1)^{\frac{\nu}{2}} P_n^\nu(x) = c(x^2-1)^\nu \frac{d^\nu P_n(x)}{dx^\nu}$$
$$= x^{n+\nu} F\left(-\frac{n+\nu}{2}, -\frac{n+\nu-1}{2}, \frac{1}{2} - n, x^{-2}\right).$$

Die zugeordneten Kugelfunktionen genügen der folgenden Differentialgleichung zweiter Ordnung:

$$(1-x^2)\frac{d^2 P_n^\nu(x)}{dx^2} - 2x\frac{d P_n^\nu(x)}{dx} + \left\{n(n+1) - \frac{\nu^2}{1-x^2}\right\} P_n^\nu(x) = 0,$$

die sich auch schreiben läßt:

$$\frac{d\left[(1-x^2)\frac{d P_n^\nu(x)}{dx}\right]}{dx} + \left\{n(n+1) - \frac{\nu^2}{1-x^2}\right\} P_n^\nu(x) = 0.$$

Die Entwicklung einer Funktion nach den Zugeordneten wird ermöglicht durch das Bestehen der folgenden Integralsätze:

$$\begin{cases} \int_{-1}^{+1} P_n^\nu(x) P_m^\nu(x) dx = 0 \quad \text{für } n = m \\ \int_{-1}^{+1} [P_n^\nu(x)]^2 dx = (-1)^\nu \frac{2}{2n+1} \cdot \frac{(n+\nu)!\,(n-\nu)!}{[1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)]^2} = (-1)^\nu \cdot \frac{4}{2n+1} \cdot \frac{1}{a_n^{(\nu)}}. \end{cases}$$

Die Zugeordneten mit verschiedenen Indizes n und konstantem Index ν einerseits, als auch die mit verschiedenen Indizes ν und konstantem Index n anderseits sind durch eine Reihe von Rekursionsformeln miteinander verbunden.

Außerdem sind die verschiedenen $P_n^\nu(x)$ mit verschiedenen Werten n und ν durch eine Anzahl von Rekursionsformeln untereinander verbunden.*)

Bemerkt sei hier noch, daß F. Neumann die Zugeordneten etwas anders definiert; er setzt nämlich:

$$P_{n\,\nu}(x) = \sqrt{x^2-1}^\nu \frac{d^\nu P_n(x)}{dx^\nu}$$
$$= (-1)^{\frac{\nu}{2}} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots 2n-1}{(n-\nu)!} P_n^\nu(x).$$

*) Man vergleiche hier Heine, Handbuch 1. Bd. S. 259.

Wir wollen jetzt dazu übergehen, die Borelsche Funktion $\varphi_{pq}(x)$ nach den Zugeordneten zu entwickeln.

Unter der gleichen Annahme wie bei den einfachen Kugelfunktionen, daß nämlich a eine positive Größe kleiner als 1 sei, entwickeln wir im Intervalle von 0 bis a, aber nicht $\varphi_{pq}(x)$, sondern wir multiplizieren $\varphi_{pq}(x)$ mit $(x^2-1)^{\frac{\nu}{2}}$ und setzen:

$$\varphi_{pq}(x)\cdot(x^2-1)^{\frac{\nu}{2}} = \sum_0^\infty{}_n\, c_n^{(pq)} P_n^\nu(x).$$

Dann folgt:

$$(1)\qquad \varphi_{pq}(x) = \sum_0^\infty{}_n c_n^{(pq)} (x^2-1)^{-\frac{\nu}{2}} P_n^\nu(x).$$

Es ist hierbei:

$$c_n^{(pq)} = \frac{\int_{-1}^{+1}(x^2-1)^{\frac{\nu}{2}}\varphi_{pq}(x)P_n^\nu(x)\,dx}{\int_{-1}^{+1}P_n^\nu(x)P_n^\nu(x)\,dx} = (-1)^\nu\cdot\frac{2n+1}{4}\,a_n^{(\nu)}\int_{-1}^{+1}(x^2-1)^{\frac{\nu}{2}}\varphi_{pq}(x)P_n^\nu(x)\,dx,$$

oder, wenn man $\mathfrak{P}_n^\nu(x)$ einführt:

$$c_n^{(pq)} = (-1)^\nu\cdot\frac{2n+1}{4}\,a_n^{(\nu)}\int_{-1}^{+1}\varphi_{pq}(x)\mathfrak{P}_n^\nu(x)\,dx.$$

Erinnert man sich daran, wie $\varphi_{pq}(x)$ definiert wurde, so folgt:

$$(-1)^\nu\cdot\frac{4}{2n+1}\cdot\frac{1}{a_n^{(\nu)}}c_n^{(pq)} = \int_{\frac{p-1}{q}a}^{\frac{pa}{q}}[qx-(p-1)a]\mathfrak{P}_n^\nu(x)\,dx + \int_{\frac{pa}{q}}^{\frac{p+1}{q}a}[-qx+(p+1)a]\mathfrak{P}_n^\nu(x)\,dx.$$

Es bestehen nun folgende Formeln:

$$\int\mathfrak{P}_n^\nu(x)\,dx = \frac{x}{n+\nu+1}\,\mathfrak{P}_n^\nu(x) - \frac{n+\nu}{(n+\nu+1)(2n-1)}\,\mathfrak{P}_{n-1}^\nu(x)$$

und

$$\int x\cdot\mathfrak{P}_n^\nu(x)\,dx = \frac{(n-\nu-1)x^2+1}{(n+\nu+2)(n-\nu-1)}\mathfrak{P}_n^\nu(x) - \frac{n^2-\nu^2}{(n+\nu+2)(n-\nu-1)(2n-1)}x\mathfrak{P}_{n-1}^\nu(x),$$

bei deren Anwendung sich $c_n^{(pq)}$ in folgende Form bringen läßt:

$$(2) \qquad (-1)^\nu \frac{4}{2n+1} \cdot \frac{1}{a_n^{(\nu)}} c_n^{(pq)} = \frac{1}{n+\nu+2} \{A_{p-1} - 2A_p + A_{p+1}\};$$

allgemein ist hier gesetzt:

$$A_r = \frac{1}{q} \mathfrak{P}_n^\nu\left(\frac{ra}{q}\right)\left\{\frac{r^2a^2}{n+\nu+1} - \frac{q^2}{n-\nu-1}\right\} + 2\frac{(\nu+1)(n+\nu)}{(2n-1)(n+\nu+1)(n-\nu-1)} ra\, \mathfrak{P}_{n-1}^\nu\left(\frac{ra}{q}\right).$$

Wir erhalten also eine der Darstellung (2) bei der Entwicklung nach den einfachen Kugelfunktionen analoge Form für die Koeffizienten $c_n^{(pq)}$. Dies legt den Gedanken nahe, zu untersuchen, ob es nicht möglich ist, diese Koeffizienten auch in eine der Form (4) des vorigen Paragraphen analoge zu bringen. — Wir verfahren zu diesem Zwecke ebenso wie im § 1, d. h. wir entwickeln die Funktionen $\mathfrak{P}_n^\nu\left(\frac{p+1}{q}a\right)$, $\mathfrak{P}_n^\nu\left(\frac{p-1}{q}a\right)$, $\mathfrak{P}_{n-1}^\nu\left(\frac{p+1}{q}a\right)$, $\mathfrak{P}_n^\nu\left(\frac{p-1}{q}a\right)$ nach dem Taylorschen Lehrsatze und zwar in folgender Weise:

$$\mathfrak{P}_n^\nu\left(\frac{p\mp1}{q}a\right) = \mathfrak{P}_n^{(\nu)}\left(\frac{pa}{q}\right) \mp \frac{a}{q} \cdot \mathfrak{P}_n^{(\nu)'}\left(\frac{pa}{q}\right) + \left(\frac{a}{q}\right)^2 \cdot \frac{1}{1\cdot 2} \cdot \mathfrak{P}_n^{(\nu)''}\left(\frac{pa}{q}\right) \mp \cdots$$

$$\mathfrak{P}_{n-1}^{(\nu)}\left(\frac{p\mp1}{q}a\right) = \mathfrak{P}_{n-1}^{(\nu)}\left(\frac{pa}{q}\right) \mp \frac{a}{q} \cdot \mathfrak{P}_{n-1}^{(\nu)'}\left(\frac{pa}{q}\right) + \left(\frac{a}{q}\right)^2 \cdot \frac{1}{1\cdot 2} \mathfrak{P}_{n-1}^{(\nu)''}\left(\frac{pa}{q}\right) + \cdots$$

Setzen wir dann diese Entwicklungen von $\mathfrak{P}_n^\nu$ und $\mathfrak{P}_{n-1}^\nu$ in (2) ein, so wird in:

$$(-1)^\nu \cdot \frac{2}{2n+1} \cdot \frac{n+\nu+2}{a_n^{(\nu)}} c_n^{(pq)}$$

der Faktor von

$$a\left(\frac{a}{q}\right)^{2r+1}$$

folgender Ausdruck sein:

$$\frac{x^2}{(2r+2)!\,(n+\nu+1)} \frac{d^{2r+2}\mathfrak{P}_n^\nu(x)}{dx^{2r+2}} - \frac{1}{(2r+2)!\,(n-\nu-1)} \frac{d^{2r+2}\mathfrak{P}_n^\nu(x)}{dx^{2r+2}} + \frac{2x}{(n+\nu+1)(2r+1)!} \frac{d^{2r+1}\mathfrak{P}_n^\nu(x)}{dx^{2r+1}}$$

$$+ \frac{1}{2r!\,(n+\nu+1)} \cdot \frac{d^{2r}\mathfrak{P}_n^\nu(x)}{dx^{2r}} + \frac{2(n+\nu)(\nu+1)}{(2n-1)(n+\nu+1)(n-\nu-1)} x \cdot \frac{d^{2r+2}\mathfrak{P}_{n-1}^\nu(x)}{dx^{2r+2}} \cdot \frac{1}{(2r+2)!}$$

$$+ \frac{2(n+\nu)(\nu+1)\cdot x}{(2r+1)!\,(2n-1)(n+\nu+1)(n-\nu-1)} \frac{d^{2r+1}\mathfrak{P}_{n-1}^\nu(x)}{dx^{2r+1}},$$

wobei wir zur Abkürzung gesetzt haben

$$\frac{pa}{q} = x.$$

Wir können die Glieder geeignet zusammenfassen, wenn wir folgende Gleichungen beachten.

Es folgt zunächst aus der Formel:

$$\frac{n+\nu}{2n-1}\frac{d\mathfrak{P}_{n-1}^{\nu}(x)}{dx} = x\frac{d\mathfrak{P}_n^{\nu}(x)}{dx} - (n+\nu)\mathfrak{P}_n^{\nu}(x)$$

durch $(2r+1)$ maliges Differenzieren:

$$\frac{n+\nu}{2n-1}\cdot\frac{d^{2r+2}\mathfrak{P}_{n-1}^{\nu}(x)}{dx^{2r+2}} = x\cdot\frac{d^{2r+2}\mathfrak{P}_n^{\nu}(x)}{dx^{2r+2}} - (n+\nu-2r-1)\cdot\frac{d^{2r+1}\mathfrak{P}_n^{\nu}(x)}{dx^{2r+1}}.$$

$2r$ maliges Differenzieren der Differentialgleichung, der die Zugeordneten genügen und die oben angegeben wurde, gibt folgende Gleichung:

$$(1-x^2)\frac{d^{2r+2}}{dx^{2r+2}}\mathfrak{P}_n^{\nu}(x) + 2(\nu-1-2r)x\frac{d^{2r+1}}{dx^{2r+1}}\mathfrak{P}_n^{\nu}(x)$$

$$+\left[(n+\nu)(n-\nu+1)-2r(2r-2\nu+1)\right]\frac{d^{2r}}{dx^{2r}}\mathfrak{P}_n^{\nu}(x) = 0.$$

Wir erhalten, wenn wir diese Formeln benutzen, zunächst:

$$\left\{\frac{x^2}{(2r+2)!\,(n+\nu+1)} - \frac{1}{(2r+2)!\,(n-\nu-1)} + \frac{2(\nu+1)x^2}{(2r+2)!\,(n+\nu+1)\,(n-\nu-1)}\right\}\frac{d^{2r+2}}{dx^{2r+2}}\mathfrak{P}^{\nu}$$

$$+\left\{\frac{2x}{(2r+1)!\,(n+\nu+1)} - \frac{2(n+\nu+2r-1)(\nu-1)x}{(2r+2)!\,(n+\nu+1)(n-\nu-1)} + \frac{2(\nu+1)x}{(2r+1)!\,(n+\nu+1)(n-\nu-1)}\right\}\frac{d^{2r+1}}{dx^{2r+1}}\mathfrak{P}_n^{\nu}(x)$$

$$+\left\{\frac{1}{(2r)!\,(n+\nu+1)} - \frac{2\cdot(\nu+1)(n+\nu-2r)}{(2r+1)!\,(n+\nu+1)(n-\nu-1)}\right\}\frac{d^{2r}}{dx^{2r}}\mathfrak{P}_n^{\nu}(x)$$

$$= \frac{(x^2-1)\frac{d^{2r+2}}{dx^{2r+2}}\mathfrak{P}_n^{\nu}(x) - 2x(\nu-2r-1)\frac{d^{2r+1}}{dx^{2r+1}}\mathfrak{P}_n^{\nu}(x)}{(2r+2)!\,(n-\nu-1)} + \frac{(2r+2)(2r-2\nu-1)}{(2r+2)!\,(n-\nu-1)}\frac{d^{2r}}{dx^{2r}}\mathfrak{P}_n^{\nu}(x)$$

$$= \frac{n^2+n-\nu^2-3\nu-2}{(2r+2)!\,(n-\nu-1)}\frac{d^{2r}}{dx^{2r}}\mathfrak{P}_n^{\nu}(x) = \frac{n+\nu+2}{(2r+2)!}\frac{d^{2r}}{dx^{2r}}\mathfrak{P}_n^{\nu}(x).$$

Der Koeffizient $c_n^{(pq)}$ wird also die Gestalt annehmen:

$$(3)\qquad c_n^{(pq)} = (-1)^{\nu}\cdot\frac{2n+1}{2}\cdot a_n^{(\nu)}\cdot a\sum_0^r\frac{1}{(2r+2)!}\frac{d^{2r}}{dx^{2r}}\mathfrak{P}_n^{\nu}(x)\cdot\left(\frac{a}{q}\right)^{2r+1}.$$

Wenn wir jetzt eine ganze Funktion von x vom Grade $(n+\nu+2)$ einführen, indem wir setzen:

$$(4)\qquad R_n^{(\nu)''}(x) = \mathfrak{P}_n^{(\nu)}(x),$$

so können wir dem Koeffizienten $c_n^{(pq)}$ auch noch folgende Gestalt geben:

$$(5)\qquad c_n^{(pq)} = (-1)^{\nu}\cdot\frac{2n+1}{4}a\cdot\left(\frac{q}{a}\right)\left\{R_n^{(\nu)}\left(\frac{p-1}{q}a\right) - 2R_n^{(\nu)}\left(\frac{pa}{q}\right) + R_n^{(\nu)}\left(\frac{p+1}{q}a\right)\right\}.$$

Ist nun die Entwicklung (1) gleichmäßig konvergent oder nicht?

Um für die Zugeordneten für große Werte von n einen asymptotischen Wert abzuleiten, wollen wir beachten, daß die einfache Kugelfunktion sich mit wachsendem Werte n dem Ausdrucke näherte:

$$\sqrt{\frac{2}{n\pi \sin \nu}} \sin\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)\vartheta + \frac{\pi}{4}\right].$$

Nun war ja $P_n^\nu(x)$ definiert durch folgende Gleichung:

$$P_n^\nu(x) = \frac{(n-\nu)!}{1\cdot 3\cdot\cdots\cdot(2n-1)}(x^2-1)^{\frac{\nu}{2}}\cdot\frac{d^\nu P_n(x)}{dx^\nu}.$$

Ersetzen wir hier $P_n(x)$ durch seinen asymptotischen Wert, so erkennen wir, daß der ν^{te} Differentialquotient von $P_n(x)$ in bezug auf n vom Grade $\left(\nu-\frac{1}{2}\right)$ ist.

Es ist nun noch der Faktor:

$$\frac{(n-\nu)!}{1\cdot 3\cdot 5\cdot\cdots\cdot(2n-1)}$$

zu betrachten.

Für große Werte von n läßt sich schreiben:

$$\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\cdots\cdot(2n-1)}{2\cdot 4\cdot\cdots 2n} = \frac{1}{\sqrt{\pi n}},\quad \Gamma(n+\alpha) = \sqrt{2\pi}\, e^{-n} n^{n+\alpha-\frac{1}{2}};$$

mithin erhalten wir:

$$\frac{(n-\nu)!}{1\cdot 3\cdot 5\cdot\cdots\cdot(2n-1)} = \frac{(n-\nu)!\sqrt{\pi n}}{2^n\cdot n!} = \frac{\sqrt{\pi}\cdot n^{\frac{1}{2}-\nu}}{2^n}.$$

Der in $c_n^{(pq)}$ noch auftretende Faktor $a_n^{(\nu)}$ läßt sich mit Hilfe der angeführten Formeln folgendermaßen schreiben:

$$\begin{aligned} a_n^{(\nu)} &= 2\cdot\frac{[1\cdot 3\cdot 5\cdot\cdots\cdot(2n-1)]^2}{(n+\nu)!\,(n-\nu)!} \\ &= 2\cdot\frac{n\cdot(n-1)(n-2)\cdot\cdots\cdot(n-\nu+1)}{(n+1)(n+2)\cdot\cdots\cdot(n+\nu)}\cdot\frac{[2\cdot 4\cdot\cdots\cdot 2n]^2}{\pi n}\cdot\frac{1}{n!\,n!} \\ &= 2\cdot\frac{n\cdot(n-1)\cdot\cdots\cdot(n-\nu+1)}{(n+1)(n+2)\cdot\cdots\cdot(n+\nu)}\cdot\frac{2^n\cdot 2^n}{\pi n}. \end{aligned}$$

Wir wollen dies nunmehr auf unseren Fall anwenden. Benutzen wir die Form (2) für die Koeffizienten $c_n^{(pq)}$, so können wir $c_n^{(pq)}$ wiederum in zwei Teile zerlegen, von denen der eine nur Funktionen $P_n^\nu(x)$ mit dem Index n, der andere nur Zugeordnete mit dem Index $(n-1)$ enthält. Bezeichnen wir diesen Teil mit $\gamma_n^{(pq)}$; jenen mit $\delta_n^{(pq)}$, so erkennen wir folgendes. Es ist:

$$(-1)^\nu\cdot\gamma_n^{(pq)} = \frac{2n+1}{4}a_n^{(\nu)}\frac{2\cdot(n+\nu)(\nu+1)\cdot a}{(2n-1)(n+\nu+1)(n-\nu-1)(n+\nu+1)}\cdot$$

$$\left\{(p-1)\mathfrak{P}_{n-1}^{(\nu)}\left(\frac{p-1}{q}a\right) - 2p\,\mathfrak{P}_{n-1}^{(\nu)}\left(\frac{pa}{q}\right) + (p+1)\mathfrak{P}_{n-1}^{(\nu)}\left(\frac{p+1}{q}a\right)\right\}\cdot$$

Dann können wir nach dem Vorangegangenen sagen: die Glieder der Summe:

$$\sum_0^\infty{}_n \gamma_n^{(p\,q)} P_n^\nu(x)$$

werden mit wachsenden Werten von n von der Ordnungszahl 3 unendlich klein, denn abgesehen von den von n unabhängigen Faktoren ist zu berücksichtigen der Ausdruck:

$$\frac{(2n+1)(n+\nu)}{(n+\nu+2)(n+\nu+1)(n-\nu-1)(2n-1)} \cdot \frac{2^n \cdot 2^n}{2^n \cdot 2^n \cdot n}$$

und dieser ist in n vom Grade -3. Man erhält den Satz:

Man kann eine ganze positive Zahl m für n derart bestimmen, daß die Summe:

$$\sum_{m+1}^\infty{}_n \gamma_n^{(p\,q)} P_n^\nu(x)$$

für alle in Betracht kommenden Werte von p und x dem absoluten Betrage nach kleiner ist als:

$$\frac{1}{q^2}.$$

Ferner bemerken wir, daß die Glieder der Reihe:

$$\sum_{m+1}^\infty{}_n \delta_n^{(p\,q)} P_n^\nu(x)$$

mit wachsendem Werte von n von der Ordnung 2 unendlich klein werden.

Somit erhalten wir den

Lehrsatz. Es läßt sich eine ganze positive Zahl m so bestimmen, daß die ganze rationale Funktion:

$$P_{p\,q}(x) = \sum_0^m{}_n c_n^{(p\,q)} (x^2-1)^{-\frac{\nu}{2}} P_n^\nu(x)$$

im Intervalle $(0, a)$ die Funktion

$$\varphi_{p\,q}(x)$$

mit der gegebenen Annäherung

$$\frac{2}{q^2}$$

darstellt.

§ 3.

Lösung des Problems mit Hilfe der verallgemeinerten Kugelfunktionen.

Wir wenden uns jetzt zu den Funktionen, die bei der Entwicklung des Ausdrucks: $[1 - 2\alpha x + \alpha^2]^{-\nu}$ nach Potenzen von α als Koeffizienten auftreten. Von den vielen Autoren, die sich mit diesen Funktionen

beschäftigt haben, sind vor allen Dingen die Arbeiten L. Gegenbauers hervorzuheben.*)

Es werde der Koeffizient von α^n in der Entwicklung obigen Ausdrucks bezeichnet mit $C_n^\nu(x)$, so ist:

$$C_n^\nu(x) = \frac{(n+\nu-1)!}{(\nu-1)!\,n!} 2^n \cdot \left\{ x^n - \frac{n(n-1)}{n+\nu-1} 2^{-2} x^{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{(n+\nu-1)(n+\nu-2)\cdot 2!} 2^{-4} x^{n-4} - \cdots \right\}$$

und es ist $C_n^\nu(x)$ ein Integral der Differentialgleichung:

$$\text{(a)} \qquad (1-x^2)\frac{d^2 C_n^\nu(x)}{dx^2} - (2\nu+1)x\frac{dC_n^\nu(x)}{dx} + n(n+2\nu)C_n^\nu(x) = 0,$$

die sich auch in der Form schreiben läßt:

$$\text{(a')} \qquad \frac{d}{dx}\left\{(1-x^2)^{\frac{2\nu+1}{2}}\frac{dC_n^\nu(x)}{dx}\right\} = -\frac{n(n+2\nu)}{2\nu}(1-x^2)^{\frac{2\nu-1}{2}} C_n^\nu(x).$$

Von Rekursionsformeln seien hier folgende erwähnt:

$$\text{(b)} \quad (n+1)C_{n+1}^\nu(x) - 2(n+\nu)xC_n^\nu(x) + (n+2\nu-1)C_{n-1}^\nu(x) = 0;$$

$$\text{(c)} \qquad 2(n+\nu)C_n^\nu(x) = \frac{dC_{n+1}^\nu(x)}{dx} - \frac{dC_{n-1}^\nu(x)}{dx};$$

$$\text{(d)} \qquad \frac{dC_n^\nu(x)}{dx} = x\frac{dC_{n-1}^\nu(x)}{dx} + (n+2\nu-1)C_{n-1}^\nu(x);$$

$$\text{(e)} \qquad \frac{dC_{n-1}^\nu(x)}{dx} = x\frac{dC_n^\nu(x)}{dx} - nC_n^\nu(x);$$

$$\text{(f)} \qquad 2\nu C_{n-1}^{\nu+1}(x) = \frac{dC_n^\nu(x)}{dx}; \qquad \frac{d^r C_n^\nu(x)}{dx^r} = 2^r \cdot \frac{(r+\nu-1)!}{(\nu-1)!} C_{n-r}^{\nu+r}(x).$$

Auch für die C_n^ν existiert ein Integraltheorem analog dem der Kugelfunktionen; es ist nämlich:

$$\text{(g)} \begin{cases} \displaystyle\int_{-1}^{+1} (1-x^2)^{\frac{2\nu-1}{2}} C_n^\nu(x) C_m^\nu(x)\,dx = 0 & \text{für } n \neq m \\ \displaystyle\int_{-1}^{+1} (1-x^2)^{\frac{2\nu-1}{2}} C_n^\nu(x) C_n^\nu(x)\,dx = \frac{2\nu(2\nu+1)\cdots(2\nu+n-1)}{n!} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)}{(n+\nu)\Gamma(\nu)}. \end{cases}$$

*) Literaturangaben findet man in dem genannten Artikel von Wangerin (a. a. O.), sowie in dem 10. Bd. der Jahresberichte der Deutschen Mathemat. Vereinigung: Burkhardt, Entwicklungen nach oszillierenden Funktionen S. 872 f. s. auch Heine, Handbuch der Kugelfunktionen 2. Aufl. 1. Bd.

Gegenbauer, Wiener Sitzungsberichte Bd. 70_2. (1875); Bd. 75_2 (1877); Bd. 102_2 (1893).

Diese beiden Integralsätze ermöglichen die Entwicklung der Borelschen Funktion in eine nach den Funktionen $C_n^\nu(x)$ fortschreitende Reihe.

Zuvor sei noch bemerkt, daß, falls ν eine ganze Zahl ist, sich die Funktionen $C_n^\nu(x)$ auf die Funktionen:

$$C_n^1(x) = \frac{\sin(n+1)\vartheta}{\sin\vartheta} \quad \text{resp.} \quad C_n^0(x) = \frac{\cos n\vartheta}{n} \qquad (x = \cos\vartheta)$$

zurückführen lassen.

Wir wenden uns nun zu der Aufgabe, die Funktion $\varphi_{pq}(x)$ durch die C_n^ν darzustellen.

Unter derselben Annahme über die Größe a wie in den beiden vorangehenden Paragraphen haben wir also:

$$(1) \qquad \varphi_{pq}(x) = \sum_0^\infty {}_n c_n^{(pq)} C_n^\nu(x)$$

und es ist für

$$\frac{2\nu \cdot 2\nu+1 \cdots 2\nu+n-1}{n!} \frac{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(\nu+\frac{1}{2})}{(n+\nu)\Gamma(\nu)} c_n^{(pq)}$$

zu setzen:

$$\int_{-1}^{+1} \varphi_{pq}(x)(1-x^2)^{\frac{2\nu-1}{2}} C_n^\nu(x)\,dx$$

$$= \int_{\frac{p-1}{q}a}^{\frac{pa}{q}} (1-x^2)^{\frac{2\nu-1}{2}} \big(qx-(p-1)a\big) C_n^\nu(x)\,dx + \int_{\frac{pa}{q}}^{\frac{p+1}{q}a} (1-x^2)^{\frac{2\nu-1}{2}} \big(-qx+(p+1)a\big) C_n^\nu(x)\,dx.$$

Mit Hilfe der beiden Formeln:

$$(h) \quad \int (1-x^2)^{\frac{2\nu-1}{2}} C_n^\nu(x)\,dx = (1-x^2)^{\frac{2\nu-1}{2}} \left\{ -\frac{x}{n+2\nu} C_n^\nu(x) - \frac{n+2\nu-1}{n\cdot(n+2\nu)} C_{n-1}^\nu(x) \right\}$$

$$(i) \quad \int x(1-x^2)^{\frac{2\nu-1}{2}} C_n^\nu(x)\,dx = (1-x^2)^{\frac{2\nu-1}{2}} \left\{ \frac{[(n-1)x^2+1]\,C_n^\nu(x) - (n+2\nu-1)\,x C_{n-1}^\nu(x)}{(n-1)(n+2\nu+1)} \right\}$$

läßt sich $c_n^{(pq)}$ so umformen, daß es folgende Gestalt annimmt:

$$(2) \quad \frac{2\nu\cdot(2\nu+1)\cdots(2\nu+n-1)}{n!} \frac{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(\nu+\frac{1}{2})}{(n+\nu)\Gamma(\nu)} c_n^{(pq)} = \frac{2}{n+2\nu+1}\{A_{p-1} - 2A_p + A_{p+1}\},$$

wo allgemein gesetzt ist:

$$A_r = \left(1-\left(\frac{ra}{q}\right)^2\right)^{\frac{2\nu-1}{2}} \cdot$$

$$\left\{ \frac{1}{q}\left(\frac{r^2a^2}{n+2\nu} - \frac{q^2}{n-1}\right) C_n^\nu\left(\frac{ra}{q}\right) + \frac{(2\nu+1)\,(n+2\nu-1)}{n(n+2\nu)(n-1)} ra\, C_{n-1}^\nu\left(\frac{ra}{q}\right) \right\}.$$

Um die Koeffizienten $c_n^{(pq)}$ noch etwas umzugestalten, verfahren wir folgendermaßen. Wir entwickeln nach dem Taylorschen Lehrsatze. Wenn wir abkürzungshalber schreiben:

$$(1-x^2)^{\frac{2\nu-1}{2}} = \varphi(x),$$

haben wir also:

$$(3)\begin{cases}
\varphi\left(\frac{p-1}{q}a\right) = \varphi\left(\frac{pa}{q}\right) - \frac{a}{q}\varphi'\left(\frac{pa}{q}\right) + \left(\frac{a}{q}\right)^2\frac{1}{1\cdot 2}\varphi''\left(\frac{pa}{q}\right) - \cdots \\
\varphi\left(\frac{p+1}{q}a\right) = \varphi\left(\frac{pa}{q}\right) + \frac{a}{q}\varphi'\left(\frac{pa}{q}\right) + \left(\frac{a}{q}\right)^2\frac{1}{1\cdot 2}\varphi''\left(\frac{pa}{q}\right) + \cdots \\
C_n^{(\nu)}\left(\frac{p-1}{q}a\right) = C_n^{(\nu)}\left(\frac{pa}{q}\right) - \frac{a}{q}\cdot C_n^{(\nu)'}\left(\frac{pa}{q}\right) + \left(\frac{a}{q}\right)^2\frac{1}{1\cdot 2}C_n^{(\nu)''}\left(\frac{pa}{q}\right) - \cdots \\
C_n^{(\nu)}\left(\frac{p+1}{q}a\right) = C_n^{(\nu)}\left(\frac{pa}{q}\right) + \frac{a}{q}C_n^{(\nu)'}\left(\frac{pa}{q}\right) + \left(\frac{a}{q}\right)^2\frac{1}{1\cdot 2}C_n^{(\nu)''}\left(\frac{pa}{q}\right) + \cdots \\
C_{n-1}^{(\nu)}\left(\frac{p-1}{q}a\right) = C_{n-1}^{(\nu)}\left(\frac{pa}{q}\right) - \frac{a}{q}C_{n-1}^{(\nu)'}\left(\frac{pa}{q}\right) + \left(\frac{a}{q}\right)^2\cdot\frac{1}{1\cdot 2}C_{n-1}^{(\nu)''}\left(\frac{pa}{q}\right) - \cdots \\
C_{n-1}^{(\nu)}\left(\frac{p+1}{q}a\right) = C_{n-1}^{(\nu)}\left(\frac{pa}{q}\right) + \frac{a}{q}C_{n-1}^{(\nu)'}\left(\frac{pa}{q}\right) + \left(\frac{a}{q}\right)^2\cdot\frac{1}{1\cdot 2}C_{n-1}^{(\nu)''}\left(\frac{pa}{q}\right) + \cdots
\end{cases}$$

Führen wir dies ein in (2), so erhalten wir, wenn wir setzen:

$$x = \frac{pa}{q},$$

für den Faktor von: $a\left(\frac{a}{q}\right)^{2r+1}$ in:

$$\frac{n+2\nu+1}{2}\cdot\frac{2\nu\cdot(2\nu+1)\cdots(2\nu+n-1)}{n!}\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)}{(n+\nu)\,\Gamma(\nu)}\,c_n^{(pq)}$$

den folgenden Ausdruck:

$$\begin{aligned}
&\frac{x^2}{n+2\nu}\left[\frac{C_n^{\nu(2r+2)}(x)}{(2r+2)!}\varphi(x) + \frac{C_n^{\nu(2r+1)}(x)}{(2r+1)!}\varphi'(x) + \frac{C_n^{\nu(2r)}(x)}{(2r)!}\frac{\varphi''(x)}{1\cdot 2} + \frac{C_n^{\nu(2r-1)}(x)}{(2r-1)!}\frac{\varphi'''(x)}{3!} + \cdots\right] \\
+&\frac{2\cdot x}{n+2\nu}\left[\frac{C_n^{\nu(2r+1)}(x)}{(2r+1)!}\varphi(x) + \frac{C_n^{\nu(2r)}(x)}{(2r)!}\varphi'(x) + \frac{C_n^{\nu(2r-1)}(x)}{(2r-1)!}\frac{\varphi''(x)}{1\cdot 2} + \frac{C_n^{\nu(2r-2)}(x)}{(2r-2)!}\cdot\frac{\varphi'''(x)}{3!} + \cdots\right] \\
+&\frac{1}{n+2\nu}\left[\frac{C_n^{\nu(2r)}(x)}{(2r)!}\varphi(x) + \frac{C_n^{\nu(2r-1)}(x)}{(2r-1)!}\varphi'(x) + \frac{C_n^{\nu(2r-2)}(x)}{(2r-2)!}\frac{\varphi''(x)}{1\cdot 2} + \frac{C_n^{\nu(2r-3)}(x)}{(2r-3)!}\cdot\frac{\varphi'''(x)}{3!} + \cdots\right] \\
-&\frac{1}{n-1}\left[\frac{C_n^{\nu(2r+2)}(x)}{(2r+2)!}\varphi(x) + \frac{C_n^{\nu(2r+1)}(x)}{(2r+1)!}\varphi'(x) + \frac{C_n^{\nu(2r)}(x)}{(2r)!}\frac{\varphi''(x)}{1\cdot 2} + \frac{C_n^{\nu(2r-1)}(x)}{(2r-1)!}\frac{\varphi'''(x)}{3!} + \cdots\right] \\
+&\frac{(2\nu+1)(2\nu+n-1)x}{n(n-1)(n+2\nu)}\left[\frac{C_{n-1}^{\nu(2r+2)}(x)}{(2r+2)!}\varphi(x) + \frac{C_{n-1}^{\nu(2r+1)}(x)}{(2r+1)!}\varphi'(x) + \frac{C_{n-1}^{\nu(2r)}(x)}{(2r!)}\cdot\frac{\varphi''(x)}{1\cdot 2} + \cdots\right] \\
+&\frac{(2\nu+1)(2\nu+n-1)}{n\cdot(n-1)(n+2\nu)}\left[\frac{C_{n-1}^{\nu(2r+1)}(x)}{(2r+1)!}\varphi(x) + \frac{C_{n-1}^{\nu(2r)}(x)}{(2r)!}\varphi'(x) + \frac{C_{n-1}^{(2r-1)}(x)}{(2r-1)!}\frac{\varphi''(x)}{1\cdot 2} + \cdots\right].
\end{aligned}$$

Dieser läßt sich so schreiben:

$$= \frac{x^2}{(n+2\nu)(2r+2)!}\frac{d^{2r+2}}{dx^{2r+2}}[C_n^\nu(x)\varphi(x)] - \frac{1}{(n-1)(2r+2)!}\frac{d^{2r+2}}{dx^{2r+2}}[C_n^\nu(x)\varphi(x)]$$

$$+ \frac{2\cdot x}{(n+2\nu)(2r+1)!}\frac{d^{2r+1}}{dx^{2r+1}}[C_n^\nu(x)\varphi(x)] + \frac{1}{(n+2\nu)2r!}\frac{d^{2r}}{dx^{2r}}[C_n^\nu(x)\varphi(x)]$$

$$+ \frac{(2\nu+1)(2\nu+n-1)\cdot x}{n(n-1)(n+2\nu)(2r+2)!}\frac{d^{2r+2}}{dx^{2r+2}}[C_{n-1}^\nu(x)\varphi(x)]$$

$$+ \frac{(2\nu+1)(2\nu+n-1)}{n(n-1)(n+2\nu)(2r+1)!}\frac{d^{2r+1}}{dx^{2r+1}}[C_{n-1}^\nu(x)\varphi(x)].$$

Aus der oben angeführten Formel (h) für $\int(1-x^2)^{\frac{2\nu-1}{2}} C_n^\nu(x)dx$ folgt, wenn man $(2r+2)$mal differenziert:

(k) $$(n+2\nu-1)\frac{d^{2r+2}}{dx^{2r+2}}[C_{n-1}^\nu(x)\varphi(x)]$$

$$= nx\frac{d^{2r+2}}{dx^{2r+2}}[\varphi(x)C_n^\nu(x)] - n(n+2\nu-2r-2)\frac{d^{2r+1}}{dx^{2r+1}}[\varphi(x)C_n^\nu(x)].$$

Wir wollen eine weitere Gleichung ableiten, indem wir die Differentialgleichung der verallgemeinerten Kugelfunktionen in der zweiten Form (a') einmal integrieren. Differenziert man sodann, so kommen wir zur folgenden Differentialgleichung:

(l) $$(1-x^2)\frac{d^2}{dx^2}[C_n^\nu(x)\varphi(x)] + (2\nu-3)x\frac{d}{dx}[C_n^\nu(x)\varphi(x)]$$

$$+ (n+1)(n+2\nu-1)[C_n^\nu(x)\varphi(x)] = 0.$$

Differenzieren wir diese Gleichung $2r$mal, so gelangen wir zur folgenden:

(m) $$(1-x^2)\frac{d^{2r+2}}{dx^{2r+2}}[C_n^\nu(x)\varphi(x)] + (2\nu-4r-3)x\frac{d^{2r+1}}{dx^{2r+1}}[C_n^\nu(x)\varphi(x)]$$

$$+ \{(n+2\nu-1)(n+1) - 2r(2r-2\nu+2)\}\frac{d^{2r}}{dx^{2r}}[C_n^\nu(x)\varphi(x)] = 0.$$

Mit Hilfe der beiden Gleichungen (k) und (m) läßt sich nun der Faktor von $a\left(\frac{a}{q}\right)^{2r+1}$ folgendermaßen umgestalten:

$$= \left\{\frac{x^2}{2r+2!\,(n+2\nu)} - \frac{1}{2r+2!\,(n-1)} + \frac{(2\nu-1)x^2}{2r+2!\,(n+2\nu)(n-1)}\right\}\frac{d^{2r+2}}{dx^{2r+2}}[\varphi(x)C_n^\nu(x)]$$

$$+ \left\{\frac{2}{2r+1!\,(n+2\nu)} - \frac{(n+2\nu-2r-2)(2\nu+1)}{2r+2!\,(n+2\nu)(n-1)} + \frac{2\nu+1}{2\nu+1!\,n+2\nu)(n-1)}\right\} x\frac{d^{2r+1}}{dx^{2r+1}}[\varphi(x)C_n^\nu(x)]$$

$$+ \left\{\frac{1}{2r!\,(n+2\nu)} - \frac{(n+2\nu-2r-1)(2\nu+1)}{2r+1!\,(n+2\nu)(n-1)}\right\}\frac{d^{2r}}{dx^{2r}}[\varphi(x)C_n^\nu(x)]$$

$$= \frac{(n+2\nu)}{2r+2!(n+2\nu)(n-1)}\left\{(x^2-1)\frac{d^{2r+2}}{dx^{2r+2}}[\varphi(x)C_n^\nu(x)] + (4r-2\nu+3)x\frac{d^{2r+1}}{dx^{2r+1}}[\varphi(x)C_n^\nu(x)]\right\}$$

$$+ \frac{2\cdot(r-\nu)(2r+2)}{2r+2!\,(n-1)}\frac{d^{2r}}{dx^{2r}}[\varphi(x)C_n^\nu(x)] = \frac{n+2\nu+1}{2r+2!}\frac{d^{2r}}{dx^{2r}}[\varphi(x)C_n^\nu(x)].$$

Es ist also:

$$(4)\qquad \left\{ \begin{array}{l} c_n^{(pq)} = \dfrac{n!}{2\nu \cdot 2\nu+1 \cdots 2\nu+n-1} \dfrac{2(n+\nu)\,\Gamma(\nu)}{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(\nu+\frac{1}{2})} \dfrac{a^2}{q} \\ \qquad \cdot \sum_0^r \dfrac{1}{2r+2!} \left(\dfrac{a}{q}\right)^{2r} \dfrac{d^{2r}}{dx^{2r}} \left[\varphi(x)\, C_n^{\nu}(x)\right]. \end{array} \right.$$

Man kann den Koeffizienten auch in folgender Form schreiben:

$$(5)\qquad \left\{ \begin{array}{l} c_n^{(pq)} = \dfrac{n!}{2\nu \cdot 2\nu+1 \cdots 2\nu+n-1} \cdot \dfrac{(n+\nu)\,\Gamma(\nu)}{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(\nu+\frac{1}{2})} \left(\dfrac{q}{a}\right) a \\ \qquad \left\{ S_n^{(\nu)}\left(\dfrac{p-1}{q}a\right) - 2S_n^{(\nu)}\left(\dfrac{pa}{q}\right) + S_n^{(\nu)}\left(\dfrac{p+1}{q}a\right)\right\}; \end{array} \right.$$

man erhält diesen Ausdruck, wenn man die Funktion $S_\nu^{(\nu)}(x)$, die vom Grade $(n + 2\nu + 1)$ ist, durch die Gleichung definiert:

$$(6)\qquad S_n^{(\nu)''}(x) = (1 - x^2)^{\frac{2\nu-1}{2}} C_n^{(\nu)}(x).$$

$S_n^{(\nu)}(x)$ ist damit bis auf eine lineare Funktion bestimmt, die man jedoch, da sie ohne Belang für die Rechnung ist, der Null gleich annehmen kann.

Es bleibt nun noch die Aufgabe, die Konvergenz der mit den Koeffizienten (2), (4) oder (5) gebildeten Reihe (1) zu untersuchen.

Man kommt rasch zum Ziele, wenn man das Verhalten der Funktion C_n^{ν} kennt, wenn man n immer mehr und mehr wachsen läßt. Zu einem asymptotischen Ausdruck für die C_n^{ν} gelangt man leicht, wenn man eine Methode anwendet, die Darboux*) angegeben hat. Das Verfahren läßt sich kurz so aussprechen:

Wenn eine Funktion $f(z)$ auf dem Konvergenzkreise unstetig wird nach Art der algebraischen Wurzeln, so daß man schreiben kann:

$$f(z) = (z - \alpha)^{\varkappa} \varphi(z) + \psi(z)$$

— wobei $\varphi(z)$ und $\psi(z)$ Funktionen sind, die man nach Potenzen von $(z - \alpha)$ entwickeln kann —, so erhält man die Koeffizienten von $f(z)$, wenn man die Entwicklung dieser Funktionen ersetzt durch die Entwicklung von:

$$\varphi(\alpha)(z - \alpha)^{\varkappa}.$$

Darboux hat diese Methode benutzt, um für die gewöhnlichen Kugelfunktionen sowohl als auch für die Jacobischen Polynome asymptotische Ausdrücke zu bestimmen. Wir wollen das Verfahren jetzt für die Funktionen $C_n^{\nu}(x)$ anwenden.

*) Darboux, Mémoire sur l'approximation des fonctions de très grands nombres etc. Journal de Mathématique (3) tome IV (1878).

Es war:

$$R = (1 - 2\alpha x + \alpha^2)^{-\nu} = \sum_0^\infty \alpha^n C_n^\nu(x).$$

Machen wir die Annahme, daß x reell und zwischen ± 1 gelegen ist, können wir also setzen:

$$x = \cos\theta, \quad 0 \leqq \theta \leqq \pi,$$

so konvergiert die Entwicklung von R, so lange $|\alpha| < 1$.

Wir können nun schreiben:

$$R = (1 - 2\alpha x + \alpha^2)^{-\nu} = (1 - \alpha e^{i\theta})^{-\nu}(1 - \alpha e^{-i\theta})^{-\nu}.$$

Hieraus ersehen wir, daß R für die Werte $\alpha = e^{-i\theta}$ und für $\alpha = e^{i\theta}$ unendlich groß wird von der Ordnung ν. Nach der angegebenen Methode haben wir nun R zu ersetzen durch den Ausdruck:

$$(1 - \alpha e^{i\theta})^{-\nu}(1 - e^{-2i\theta})^{-\nu} + (1 - \alpha e^{-i\theta})^{-\nu}(1 - e^{2i\theta})^{-\nu}$$

und diesen nach Potenzen von α zu entwickeln. Der Koeffizient von α^n wird dann:

$$C_n^\nu(\cos\theta) \sim \frac{\nu \cdot \nu+1 \cdot \nu+2 \cdots \nu+n-1}{n!} \left\{ \frac{e^{i\theta n}}{(1 - e^{-2i\theta})^\nu} + \frac{e^{-i\theta n}}{(1 - e^{2i\theta})^\nu} \right\}.$$

Wir wollen einige Umformungen vornehmen; wir schreiben:

$$e^{i\theta n}(1 - e^{-2i\theta})^{-\nu} + e^{-i\theta n}(1 - e^{2i\theta})^{-\nu}$$

$$= e^{i\theta n}(2\sin^2\theta + 2i\sin\theta\cos\theta)^{-\nu} + e^{-i\theta n}(2\sin^2\theta - 2i\sin\theta\cos\theta)^{-\nu}$$

$$= 2^{-\nu} i^{-\nu} \sin^{-\nu}\theta \left[e^{i\theta n}(\cos\theta - i\sin\theta)^{-\nu} + e^{-i\theta n}[-\cos\theta - i\sin\theta]^{-\nu} \right]$$

$$= \frac{1}{2^\nu \cdot i^\nu \sin^\nu\Theta} \left[e^{i\theta n} \cdot e^{i\nu\theta} + e^{-i\theta n} \cdot e^{i\nu(\pi-\theta)} \right]$$

$$= \frac{1}{2^\nu \cdot i^\nu \sin^\nu\Theta} \left[e^{i\left((n+\nu)\theta - \frac{\nu\pi}{2}\right)} + e^{-i\left((n+\nu)\theta - \frac{\nu\pi}{2}\right)} \right] e^{i\frac{\nu\pi}{2}}$$

$$= \frac{2}{2^\nu \cdot i^\nu \sin^\nu\Theta} \cos\left[(n+\nu)\theta - \frac{\nu\pi}{2}\right] e^{i\frac{\nu\pi}{2}}$$

$$= 2^{1-\nu} \sin^{-\nu}\theta \cos\left[(n+\nu)\theta - \frac{\nu\pi}{2}\right] \cdot e^{i\frac{\nu\pi}{2}} \cdot e^{-\frac{\nu\pi i}{2}}.$$

Wir erhalten also:

$$C_n^\nu(\cos\theta) \sim \frac{\nu \cdot \nu+1 \cdots \nu+n-1}{n!} \cdot 2^{1-\nu} \sin^{-\nu}\theta \cos\left[(n+\nu)\theta - \frac{\nu\pi}{2}\right].$$

Da nun

$$\Gamma(\nu) = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n}{\nu \cdot \nu+1 \cdots \nu+n-1} n^{\nu-1},$$

so geht der Ausdruck für $C_n^\nu(\cos\theta)$ in den folgenden über:

$$C_n^\nu(\cos\theta) \sim \cdot \frac{n^{\nu-1}}{2^{\nu-1}\sin^\nu\Theta\,\Gamma(\nu)} \cos\left[(n+\nu)\theta - \frac{\pi\nu}{2}\right]$$

und, wenn man ferner beachtet, daß

$$\Gamma(\nu)\cdot\Gamma(1-\nu) = \frac{\pi}{\sin\nu\pi},$$

so folgt:

$$\underline{C_n^\nu(\cos\theta) \sim \left(\frac{n}{2}\right)^{\nu-1} \frac{\Gamma(1-\nu)}{\pi} \frac{\sin\nu\pi}{\sin^\nu\Theta} \cos\left[(n+\nu)\theta - \frac{\nu\pi}{2}\right].}$$

Für $\nu = \frac{1}{2}$ gelangt man zu dem bekannten asymptotischen Werte für die Kugelfunktionen, wenn man noch beachtet, daß $\sqrt{\pi} = \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$.

Die Funktionen C_n^ν werden also mit wachsenden Werten von n unendlich groß wie $\left(\frac{1}{n}\right)^{1-\nu}$.

Wir wollen dies Resultat jetzt zur Konvergenzuntersuchung der durch (1) gegebenen Entwicklung benutzen. Die Koeffizienten $c_n^{(pq)}$ lassen sich, wie aus der Form (2) ersichtlich, in zwei Teile zerlegen, von denen der eine — wir wollen ihn durch $\gamma_n^{(pq)}$ bezeichnen — nur Funktionen mit dem Stellenzeiger $(n-1)$ enthält, der andere $\delta_n^{(pq)}$ dagegen nur Funktionen mit dem Index n. Der in (2) auftretende Faktor von $\gamma_n^{(pq)}$ und $\delta_n^{(pq)}$ lautet:

$$\frac{1\cdot 2\cdot 3\cdots n}{2\nu\cdot 2\nu+1\cdots 2\nu+n-1} \cdot \frac{(n+\nu)\,\Gamma(\nu)}{\Gamma\frac{1}{2}\,\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)} \cdot \frac{2}{n+2\nu+1}.$$

Für große Werte von n können wir den ersten Faktor ersetzen durch:

$$\frac{\Gamma(2\nu)}{n^{2\nu-1}};$$

wir erhalten also:

$$\frac{(n+\nu)\,\Gamma(\nu)\,\Gamma(2\nu)\cdot 2}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)n^{2\nu-1}\cdot(n+2\nu+1)}.$$

$\gamma_n^{(pq)}$ wird nun folgende Gestalt haben:

$$\gamma_n^{(pq)} = \frac{(n+\nu)\,\Gamma(\nu)\,\Gamma(2\nu)\,2}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)n^{2\nu-1}(n+2\nu+1)} \cdot \frac{(2\nu+1)(n+2\nu-1)}{n(n+2\nu)(n-1)} q \cdot$$

$$[x_{p-1}\varphi(x_{p-1})C_{n-1}^\nu(x_{p-1}) - 2x_p\varphi(x_p)C_n^\nu(x_p) + x_{p+1}\varphi(x_{p+1})C_n^\nu(x_p)].$$

Der Faktor vor der Klammer wird von der Ordnung $(2\nu+1)$ unendlich klein, die Glieder $\gamma_n^{(pq)}C_n^\nu$ von der Ordnung: $2\nu+1+2-2\nu=3$.

Es ist weiter ersichtlich, daß die Glieder der Entwicklung: $\sum\delta_n^{(pq)}C_n^\nu(x)$ von der Ordnungszahl 2 unendlich werden.

Somit gelangen wir zu dem **Resultat:**

Es läßt sich stets eine ganze positive Zahl m so bestimmen, daß die ganze rationale Funktion:

$$P_{pq}(x) = \sum_0^m {}_n c_n^{(pq)} C_n^{\nu}(x)$$

die Funktion $\varphi_{pq}(x)$ in dem Intervalle $(0 \cdots a)$ mit der gegebenen Annäherung $\frac{2}{q^2}$ darstellt.

---

§ 4.

Lösung des Problems mit Hilfe der Jacobischen Polynome.

Die Funktionen, nach welchen wir jetzt entwickeln wollen, sind von Jacobi[1]) und P. L. Tschebyscheff[2]) eingehend untersucht worden. Es sind dies die Polynome der hypergeometrischen Reihe, welche die in den vorangehenden Paragraphen angewandten Funktionen sämtlich als spezielle Fälle in sich enthalten. Jacobi gibt in einer nachgelassenen Arbeit für die Funktionen den folgenden Ausdruck:

$$X_n(x) = F(\alpha + n,\ -n,\ \gamma,\ x) = \frac{x^{1-\gamma}(1-x)^{\gamma-\alpha}}{\gamma(\gamma+1)(\gamma+2)\cdots(\gamma+n-1)} \frac{d^n}{dx^n}\{x^{\gamma+n-1}(1-x)^{\alpha-n-\gamma}\}.$$

Diese Funktionen X_n treten auf als Entwicklungskoeffizienten des folgenden Ausdrucks:

$$\frac{x^{1-\gamma}(1-x)^{\gamma-\alpha}\{t-1+\sqrt{1-2t\zeta+t^2}\}^{\gamma-1}\{t+1-\sqrt{1-2t\zeta+t^2}\}^{\alpha-\gamma}}{(2t)^{\alpha-1}\sqrt{1-2t\zeta+t^2}}$$

$$= \sum_0^\infty {}_n \frac{\gamma\cdot(\gamma+1)\cdots(\gamma+n-1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots n} t^n X_n(x),$$

worin zur Abkürzung gesetzt wurde:

$$x = \frac{1-\zeta}{2}.$$

Sie genügen der folgenden linearen Differentialgleichung 2. Ordnung:

$$\text{(a)}\quad x(1-x)\frac{d^2}{dx^2}X(x) + [\gamma - (\alpha+1)x]\frac{dX_n(x)}{dx} + (n+\alpha)nX_n(x) = 0,$$

die man auch schreiben kann:

$$\text{(a')}\quad \frac{d}{dx}\left\{x^{\gamma}(1-x)^{\alpha-\gamma+1}\frac{dX_n(x)}{dx}\right\} = -n(n+\alpha)x^{\gamma-1}(1-x)^{\alpha-\gamma}X_n(x).$$

1) Jacobi, C. G. J., Crelle Bd. 56 (1859); Werke Bd. 6.

2) Tschebyscheff, P. L., Petersb. mém. 16 (1870). Siehe auch Burkhardt, Jahresbericht d. deutsch. Math. Vereinigung 10. Bd. § 84 S. 871 sequ.

Von dieser Form der Differentialgleichung ausgehend, kann man dieselbe noch folgendermaßen transformieren:

Wir integrieren (a) zunächst und differenzieren dann; man erhält dadurch:

$$x(1-x)\frac{d}{dx}[x^{\gamma+1}(1-x)^{\alpha-\gamma}X_n] - [(1-\alpha)x-(1-\gamma)]x^{\gamma-1}(1-x)^{\alpha-\gamma}X_n + n(n+\alpha)\int x^{\gamma-1}(1-x)^{\alpha-\gamma}X_n\,dx = C$$

und hieraus:

$$(a'')\quad \begin{cases} x(1-x)\frac{d^2}{dx^2}\left[x^{\gamma-1}(1-x)^{\alpha-\gamma}X_n\right] + \left\{(\alpha-3)x+(2-\gamma)\right\}\frac{d}{dx}\left[x^{\gamma-1}(1-x)^{\alpha-\gamma}X_n\right] \\ \qquad + \left\{n(n+\alpha)+(\alpha-1)\right\}x^{\gamma-1}(1-x)^{\alpha-\gamma}X_n = 0. \end{cases}$$

Unter der Annahme, daß

$$\alpha-\gamma+1>0, \qquad \gamma>0$$

bestehen die beiden wichtigen Integralsätze:

$$(b)\quad \begin{cases} \int_0^1 x^{\gamma-1}(1-x)^{\alpha-\gamma}X_nX_m\,dx = 0 \qquad \text{für } n \neq m \\ \int_0^1 x^{\gamma-1}(1-x)^{\alpha-\gamma}X_nX_n\,dx = \frac{1}{\alpha+2n}\cdot\frac{\Gamma(n+1)\cdot\Gamma(\gamma)^2\cdot\Gamma(\alpha+n-\gamma+1)}{\Gamma(n+\alpha)\,\Gamma(n+\gamma)} = J_n. \end{cases}$$

Man wird daraus schließen können, daß sich in dem Intervalle von 0 bis 1 eine Funktion in eine Reihe von Jacobischen Polynomen wird entwickeln lassen.

Jacobi hat noch einige Rekursionsformeln für die Polynome X_n angegeben und zwar sind es die folgenden:

$$(c)\quad \frac{(n+\alpha)(n+\gamma)}{2n+\alpha+1}(X_{n+1}-X_n)+(2n+\alpha)xX_n+\frac{n(n+\alpha-\gamma)}{2n+\alpha-1}(X_{n-1}-X_n)=0;$$

$$(d)\quad nX_n - x\frac{dX_n}{dx} = nX_{n-1}+\frac{n}{n+\alpha-1}x\frac{dX_{n-1}}{dx};$$

$$(e)\quad (n+\gamma)X_{n+1} = x(1-x)\frac{2n+\alpha+1}{n+\alpha}\frac{dX_n}{dx}+\left[(n+\gamma)-(2n+\alpha+1)x\right]X_n;$$

$$(f)\quad (n+\gamma)\frac{dX_{n+1}}{dx} = \frac{n+1}{n+\alpha}\left[(n+\alpha-\gamma+1)-(2n+\alpha+1)x\right]\frac{dX_n}{dx}-(n+1)(2n+\alpha+1)X_n;$$

$$(g)\quad \begin{cases} (n+1)(n+\alpha-1)\int X_n\,dx + \frac{(n+\alpha)(n+\gamma)(n+\alpha-1)}{(2n+\alpha)(2n+\alpha+1)}X_{n+1} \\ -\frac{n(n+1)(n+\alpha-\gamma)}{(2n+\alpha)(2n+\alpha-1)}X_{n-1}+(2n+\alpha)\left[n(2\gamma-\alpha-1)+(1-\alpha^2)\right]X_n = 0. \end{cases}$$

Für sehr große Werte von n hat Darboux (a. a. O.) einen asymptotischen Ausdruck für diese Polynome gegeben und zwar den folgenden:

$$X_n(\sin^2\varphi) = \frac{\Gamma(\gamma)}{\sqrt{\pi}} n^{\frac{1}{2}-\gamma} \sin\varphi^{\frac{1}{2}-\gamma} \cos\varphi^{\gamma-\alpha-\frac{1}{2}} \left\{ \cos\left[(2n+\alpha)\varphi - \frac{\pi}{4}(2\gamma-1)\right] + \frac{p}{n^{\frac{1}{2}+\gamma}} \right\}.$$

Wir wollen jetzt die Borelsche Interpolationsfunktion $\varphi_{pq}(x)$ durch die Jacobischen Polynome darzustellen suchen. Da haben wir also zu setzen:

$$(1) \qquad \varphi_{pq}(x) = \sum_0^\infty {}_n c_n^{(pq)} X_n,$$

und es ist dabei:

$$c_n^{(pq)} = \frac{\int_0^1 \varphi_{pq}(x)\, x^{\gamma-1}(1-x)^{\alpha-\gamma} X_n\, dx}{\int_0^1 x^{\gamma-1}(1-x)^{\alpha-\gamma} X_n X_n\, dx},$$

oder

$$c_n^{(pq)} \cdot J_n = \int_0^1 x^{\gamma-1}(1-x)^{\alpha-\gamma} \varphi_{pq}(x) X_n dx$$

$$= \int_{\frac{p-1}{q}a}^{\frac{pa}{q}} \left(qx-(p-1)a\right) x^{\gamma-1}(1-x)^{\alpha-\gamma} X_n dx + \int_{\frac{pa}{q}}^{\frac{p+1}{q}a} \left(-qx+(p+1)a\right) x^{\gamma-1}(1-x)^{\alpha-\gamma} X_n dx.$$

Dabei bedeutet:

$$J_n = \frac{1}{\alpha+2n} \cdot \frac{\Gamma(n+1)\,\Gamma(\gamma)^2\,\Gamma(\alpha+n-\gamma+1)}{\Gamma(n+\alpha)\,\Gamma(n+\gamma)}.$$

Die beiden in $c_n^{(pq)}$ auftretenden Integrale lassen sich nun berechnen mit Hilfe der Formeln:

$$(h) \quad \int x^{\gamma-1}(1-x)^{\alpha-\gamma} X_n dx = \frac{x^{\gamma-1}(1-x)^{\alpha-\gamma}}{(n+\alpha)(2n+\alpha-1)} \cdot \left\{ [(2n+\alpha-1)x - (n+\alpha-\gamma)] X_n + (n+\alpha-\gamma) X_{n-1} \right\}$$

und

$$(i) \quad \int x \cdot x^{\gamma-1}(1-x)^{\alpha-\gamma} X_n dx = \frac{x^{\gamma-1}(1-x)^{\alpha-\gamma}}{n+\alpha+1} \cdot \left\{ x^2 X_n - \frac{(n+\alpha-\gamma)(n+\alpha-1)}{(n+\alpha)(2n+\alpha-1)} x X_n \right.$$
$$\left. + \frac{\gamma(n+\alpha-\gamma)}{(n-1)(n+\alpha)(2n+\alpha-1)} X_n + \frac{n(n+\alpha-\gamma)}{(n-1)(2n+\alpha-1)} x X_{n-1} - \frac{\gamma(n+\alpha-\gamma)}{(n-1)(n+\alpha)(2n+\alpha-1)} X_{n-1} \right\}.$$

Zu der ersten dieser beiden Formeln kommt man, wenn man von der Differentialgleichung (a′) ausgeht und diese integriert. Man erhält somit:

$$n(n+\alpha)\int x^{\gamma-1}(1-x)^{\alpha-\gamma}X_n(x)\,dx = -\,x^{\gamma-1}(1-x)^{\alpha-\gamma}\left\{x(1-x)\frac{dX}{dx}\right\}.$$

Mit Hilfe der Formel (e) geht die rechte Seite über in die folgende:

$$= -\frac{x^{\gamma-1}(1-x)^{\alpha-\gamma}}{2n+\alpha+1}\{(n+\alpha)(n+\gamma)X_{n+1}+[(2n+\alpha+1)x-(n+\gamma)](n+\alpha)X_n\};$$

zu unserer Formel (h) gelangt man dann, wenn man hier X_{n+1} vermittels (c) durch X_n und X_{n-1} ausdrückt.

Die zweite Gleichung erhält man durch Integration der Formel (c) bei Benutzung von (h).

— Ersetzt man x durch $\frac{1-\xi}{2}$, so erhalten wir für die Formel (i) die folgende:

$$\int \xi(1-\xi)^{\gamma-1}(1+\xi)^{\alpha-\gamma}X_n'\,d\xi = \frac{(1-\xi)^{\gamma-1}(1+\xi)^{\alpha-\gamma}}{(2n+\alpha-1)(n+\alpha+1)(n+\alpha)(n-1)}\cdot$$

$$\{(2n+\alpha-1)(n+\alpha)(n-1)\xi^2X_n'+[2\gamma(n+\alpha-1)-n(\alpha+1)-\alpha^2+1]\xi X_n'$$
$$+[4(n+\alpha-\gamma)(n+\gamma-1)-(2n+\alpha-1)(n-1)]X_n'-2n(n+\alpha-\gamma)(n+\alpha)\xi X_{n-1}'$$
$$+[2(\alpha-\gamma)(n+\alpha+1-2\gamma)-2n(1-\gamma)]X_{n-1}'\}.$$

Setzt man hier $\alpha=\gamma=1$ und $x=\sin\varphi$, also $\xi=\cos 2\varphi$, so gelangt man zu der im § 1 für die einfachen Kugelfunktionen gegebenen Formel.*)—

Die Koeffizienten $c_n^{(pq)}$ nehmen jetzt die folgende Gestalt an:

$$(2)\qquad \underline{J_n\cdot c_n^{(pq)}=\frac{1}{n+\alpha+1}\{A_{p-1}-2A_p+A_{p+1}\}},$$

worin allgemein gesetzt ist:

$$A_r=\left(\frac{ra}{q}\right)^{\gamma-1}\left(1-\frac{ra}{q}\right)^{\alpha-\gamma}\cdot\left\{\frac{1}{q}\left[\frac{r^2a^2}{n+\alpha}-\frac{2(n+\alpha-\gamma)raq}{(2n+\alpha-1)(n+\alpha)}-\frac{(n+\alpha-\gamma)\cdot\gamma\cdot q^2}{(2n+\alpha-1)(n+\alpha)(n-1)}\right]X_n\left(\frac{ra}{q}\right)\right.$$
$$\left.-\frac{(\alpha+1)(n+\alpha-\gamma)}{(2n+\alpha-1)(n+\alpha)(n-1)}raX_{n-1}\left(\frac{ra}{q}\right)+\frac{(n+\alpha-\gamma)\cdot\gamma\cdot q}{(2n+\alpha-1)(n+\alpha)(n-1)}X_{n-1}\left(\frac{ra}{q}\right)\right\}.$$

Die nächste Aufgabe wird jetzt darin bestehen, die Konvergenz der durch (1) gegebenen Entwicklung zu untersuchen.

Der Faktor J_n wird für große Werte von n folgenden Wert annehmen:

$$\underline{J_n=\Gamma^2(\gamma)n^{1-2\gamma}},$$

wenn man nur beachtet, daß

$$\Gamma(n+p)=\sqrt{2\pi}e^{-n}n^{n+p-\frac{1}{2}}\left\{1+\frac{1}{12n}[1+6p(p-1)](1+\varepsilon)\right\}.$$

*) Die Bezeichnung X' soll nicht etwa einen Differentialquotienten bedeuten, sondern lediglich die Funktion X bezeichnen, in der x durch ξ ersetzt ist.

Die Konstanten $c_n^{(pq)}$ zerfallen in zwei Teile: $\gamma_n^{(pq)}$ und $\delta_n^{(pq)}$. Der eine Teil, $\gamma_n^{(pq)}$, enthält nur Polynome mit dem Index $(n-1)$ und, von dem gemeinsamen Faktor abgesehen, der die Form hat:

$$\frac{(n+\alpha-\gamma)}{(n+\alpha+1)(2n+\alpha-1)(n+\alpha)(n-1)} \cdot \frac{1}{J_n},$$

autet er:

$$q\cdot\gamma\left\{\varphi\left(\frac{p-1}{q}a\right)X_{n-1}\left(\frac{p-1}{q}a\right)-2\varphi\left(\frac{pa}{q}\right)X_{n-1}\left(\frac{pa}{q}\right)+\varphi\left(\frac{p+1}{q}a\right)X_{n-1}\left(\frac{p+1}{q}a\right)\right\}$$

$$-(\alpha+1)a\left\{(p-1)\varphi\left(\frac{p-1}{q}a\right)X_{n-1}\left(\frac{p-1}{q}a\right)-2p\varphi\left(\frac{pa}{q}\right)X_{n-1}\left(\frac{pa}{q}\right)\right.$$

$$\left.-(p+1)\varphi\left(\frac{p+1}{q}a\right)X_{n-1}\left(\frac{p+1}{q}a\right)\right\}.$$

Der gemeinsame Faktor wird mit wachsendem Werte von n unendlich klein werden von der Ordnung: $4-2\gamma$, die Polynome selbst werden unendlich klein von der Ordnung $\gamma-\frac{1}{2}$. Mithin gelangen wir zu dem folgenden Resultat:

Es läßt sich eine Zahl m so bestimmen, daß für alle in Betracht kommenden Werte von p und x:

$$\sum_{m+1}^{\infty} {}_n\gamma_n^{(pq)} X_n$$

dem absoluten Betrage nach kleiner ist als:

$$\frac{1}{q^2}.$$

Der andere Teil von $c_n^{(pq)}$ enthält nur Polynome mit dem Index n. Es folgt, daß die Glieder der Summe: $\sum \delta_n^{(pq)} X_n$ unendlich klein werden von der Ordnung 2.

Wir haben es also in (1) mit einer gleichmäßig konvergierenden Reihe zu tun und können den folgenden **Lehrsatz** aussprechen:

Es läßt sich eine ganze positive Zahl m so bestimmen, daß die ganze rationale Funktion:

$$P_{pq}(x) = \sum_{0}^{m} {}_n c_n^{(pq)} X_n$$

im Intervalle von 0 bis a die Funktion $\varphi_{pq}(x)$ mit der vorgeschriebenen Annäherung $\frac{2}{q^2}$ darstellt.

Wir wenden uns nunmehr wieder den Koeffizienten $c_n^{(pq)}$ zu und wollen dieselben etwas transformieren. Dazu verfahren wir so, wie wir es schon bei den Entwicklungen in den vorhergehenden Para-

graphen getan haben, d. h., wir entwickeln nach dem Taylorschen Lehrsatze und setzen also:

$$(3)\begin{cases} \varphi\left(\frac{p \mp 1}{q} a\right) = \varphi\left(\frac{p a}{q}\right) \mp \frac{a}{q} \varphi'\left(\frac{p a}{q}\right) + \left(\frac{a}{q}\right)^2 \frac{1}{1 \cdot 2} \varphi''\left(\frac{p a}{q}\right) \mp \cdots \\ X_n\left(\frac{p \mp 1}{q} a\right) = X_n\left(\frac{p a}{q}\right) \mp \frac{a}{q} X_n'\left(\frac{p a}{q}\right) + \left(\frac{a}{q}\right)^2 \frac{1}{1 \cdot 2} X''\left(\frac{p a}{q}\right) \mp \cdots \\ X_{n-1}\left(\frac{p \mp 1}{q} a\right) = X_{n-1}\left(\frac{p a}{q}\right) \mp \frac{a}{q} X_n'\left(\frac{p a}{q}\right) + \left(\frac{a}{q}\right)^2 \frac{1}{1 \cdot 2} X_n''\left(\frac{p a}{q}\right) \mp \cdots \end{cases}$$

wobei zur Abkürzung gesetzt ist:

$$\varphi(x) = x^{\gamma-1}(1-x)^{\alpha-\gamma}.$$

In

$$\frac{n+\alpha+1}{\alpha+2n} \cdot \frac{\Gamma(n+1)\,\Gamma^2(\gamma)\,\Gamma(\alpha+n-\gamma+1)}{\Gamma(n+\alpha)\,\Gamma(n+\gamma)} \cdot c_n^{(p\,q)}$$

wird dann der Faktor von: $2a\left(\frac{a}{q}\right)^{2r+1}$ gleich:

$$\frac{x^2}{(n+\alpha)(2r+2)!} \frac{d^{2r+2}}{dx^{2r+2}}[\varphi(x) X_n(x)] - \frac{2(n+\alpha-\gamma)x}{(2r+2)!\,(2n+\alpha-1)\,(n+\alpha)} \frac{d^{2r+2}}{dx^{2r+2}}[\varphi(x) X_n(x)]$$

$$- \frac{\gamma(n+\alpha-\gamma)}{(2r+2)!\,(n+\alpha)\,(n-1)\,(2n+\alpha-1)} \frac{d^{2r+2}}{dx^{2r+2}}[\varphi(x) X_n(x)] + \frac{2x}{(2r+1)!\,(n+\alpha)} \frac{d^{2r+1}}{dx^{2r+1}}[\varphi(x) X_n(x)]$$

$$- \frac{2(n+\alpha-\gamma)}{(2r+1)!\,(n+\alpha)\,(2n+\alpha-1)} \frac{d^{2r+1}}{dx^{2r+1}}[\varphi(x) X_n(x)] + \frac{1}{(2r)!\,(n+\alpha)} \frac{d^{2r}}{dx^{2r}}[\varphi(x) X_n(x)]$$

$$- \frac{(\alpha+1)(n+\alpha-\gamma) \cdot x}{(2r+2)!\,(2n+\alpha-1)\,(n+\alpha)\,(n-1)} \frac{d^{2r+2}}{dx^{2r+2}}[\varphi(x) X_{n-1}(x)]$$

$$+ \frac{\gamma(n+\alpha-\gamma)}{(2r+2)!\,(2n+\alpha-1)\,(n+\alpha)\,(n-1)} \frac{d^{2r+2}}{dx^{2r+2}}[\varphi(x) X_{n-1}(x)]$$

$$- \frac{(\alpha+1)(n+\alpha-\gamma)}{(2r+1)!\,(2n+\alpha-1)\,(n+\alpha)\,(n-1)} \frac{d^{2r+1}}{dx^{2r+1}}[\varphi(x) X_{n-1}(x)],$$

wobei zur Abkürzung gesetzt ist:

$$x = \frac{p a}{q}.$$

Dieser Ausdruck läßt sich bedeutend vereinfachen bei Benutzung folgender beiden Gleichungen:

$$(n+\alpha-\gamma) \frac{d^{2r+2}}{dx^{2r+2}}[\varphi(x) X_{n-1}(x)] = (2n+\alpha-1)(n+\alpha-2r-2) \frac{d^{2r+1}}{dx^{2r+1}}[\varphi(x) X_n(x)]$$

$$- \{(2n+\alpha-1)x - (n+\alpha-\gamma)\} \frac{d^{2r+2}}{dx^{2r+2}}[\varphi(x) X_n(x)]$$

und:

$$x(1-x) \frac{d^{r+2}}{dx^{r+2}}[\varphi(x) X_n(x)] + [(r+2-\gamma) + (\alpha-2r-3)x] \frac{d^{r+1}}{dx^{r+1}}[\varphi(x) X_n(x)]$$

$$+ [(n+1)(n+\alpha-1) - r(r+2-\alpha)] \frac{d^r}{dx^r}[\varphi(x) X_n(x)] = 0.$$

[Die erste dieser beiden Gleichungen erhält man durch $(2r+2)$ maliges Differenzieren der Formel (g). Die andere geht aus (a'') durch öfteres Differenzieren hervor.]

Setzt man: $x = \frac{1-\xi}{2}$, so lauten die zwei entsprechenden Gleichungen:

$$(n+\alpha-\gamma)\frac{d^{2r+2}}{d\xi^{2r+2}}[\psi(\xi)X'_{n-1}(\xi)] = \tfrac{1}{2}(2n+\alpha-1)(n+\alpha-2r-2)\frac{d^{2r+1}}{d\xi^{2r+1}}[\psi(\xi)X'_n(\xi)]$$
$$+\frac{(2n+\alpha-1)\xi-(2\gamma-\alpha-1)}{2}\frac{d^{2r+2}}{d\xi^{2r+2}}\psi(\xi)X'_n(\xi)]$$

und

$$(1-\xi^2)\frac{d^{r+2}}{d\xi^{r+2}}[\psi(\xi)X'_n(\xi)]-[(1-2\gamma+\alpha)-(\alpha-2r-3)\xi]\frac{d^{r+1}}{d\xi^{r+1}}[\psi(\xi)X'_n(\xi)]$$
$$+[(n+1)(n+\alpha-1)-r(r-\alpha+2)]\frac{d^r}{d\xi^r}[\psi(\xi)X'_n(\xi)]=0.$$

Der Faktor von $2a\left(\frac{a}{q}\right)^{2r+1}$ wird dann nach einigen Umformungen die Form erhalten:

$$=\frac{n+\alpha+1}{2r+2!}\frac{d^{2r}}{dx^{2r}}\{\varphi(x)X_n(x)\}.$$

Wir erhalten damit das Resultat:

Die Koeffizienten $c_n^{(pq)}$ der Entwicklung (1) lassen sich in der Form schreiben:

$$(4)\qquad J_n\cdot c_n^{(pq)} = 2a\sum_0^r\frac{1}{2r+2!}\left(\frac{a}{q}\right)^{2r+1}\frac{d^{2r}}{dx^{2r}}\{x^{\gamma-1}(1-x)^{\alpha-\gamma}X_n(x)\}.$$

Es läßt sich auch hier (4) etwas anders schreiben, wenn wir eine ganze Funktion von x vom Grade $(n+2)$ einführen. Diese werde definiert durch die Gleichung:

$$(5)\qquad R_n''(x) = x^{\gamma-1}(1-x)^{\alpha-\gamma}X_n(x).$$

Dann ist leicht zu sehen, daß wir schreiben können:

$$(6)\qquad J_n\cdot c_n^{(pq)} = a\left(\frac{q}{a}\right)\left\{R_n\left(\frac{p-1}{q}a\right)-2R_n\left(\frac{pa}{q}\right)+R_n\left(\frac{p+1}{q}a\right)\right\}.$$

In den Grenzintervallen treten kleine Modifikationen der Koeffizienten ein. In der Tat, setzen wir $p=0$, so folgt:

$$(1')\qquad \varphi_{0q}(x) = \sum_0^\infty{}_n c_n^{(0q)}X_n,$$

und es ist zu setzen:

$$c_n^{(0q)}\cdot J_n = \int_0^1 x^{\gamma-1}(1-x)^{\alpha-\gamma}\varphi_{0q}(x)X_n\,dx = \int_0^{\frac{a}{q}}(-qx+a)x^{\gamma-1}(1-x)^{\alpha-\gamma}X_n\,dx$$

Man erhält:

$$(2') \qquad \underline{c_n^{(o\,q)} \cdot J_n = \frac{1}{n+\alpha+1}\left\{-A_0 + A_1\right\},}$$

wo

$$A_0 = 0.$$

Setzt man dagegen $\underline{p = q}$, so folgt, daß der Koeffizient $c_n^{(q\,q)}$ der Entwicklung:

$$(1'') \qquad \varphi_{q\,q}(x) = \sum_0^\infty{}_n\, c_n^{(q\,q)} X_n$$

zu schreiben ist:

$$c_n^{(q\,q)} \cdot J_n = \int_{\frac{q-1}{q}a}^{a} [qx - (q-1)a]\, x^{\gamma-1}(1-x)^{\alpha-\gamma} X_n\, dx.$$

Dies geht über in folgende Gestalt:

$$(2'') \quad \underline{c_n^{(q\,q)} \cdot J_n = \frac{1}{n+\alpha+1}\left\{A_{q-1} - A_q\right\} + a\int_{\text{für } x=a} x^{\gamma-1}(1-x)^{\alpha-\gamma} X_n\, dx.}$$

Man kann auch $c_n^{(o\,q)}$ in analoger Weise schreiben:

$$\underline{c_n^{(o\,q)} \cdot J_n = \frac{1}{n+\alpha+1}\left\{-A_0 + A_1\right\} - a\int_{\text{für } x=0} x^{\gamma-1}(1-x)^{\alpha-\gamma} X_n\, dx.}$$

Nach einigen Umformungen erhält man folgende Darstellungen der Koeffizienten:

$$(5') \quad \underline{c_n^{(o\,q)} \cdot J_n = a \cdot \frac{a}{q} \sum_0^r \frac{1}{r+2!}\left(\frac{a}{q}\right)^r \frac{d^r}{dx^r}[\varphi(x) X_n(x)]_{x=0} + a\int_{\text{für } x=0} \varphi(x) X_n(x)\, dx}$$

$$\underline{= a \cdot \left(\frac{q}{a}\right)\left\{-R_n(0) + R_n\left(\frac{a}{q}\right) - \frac{a}{q} R_n'(0)\right\} + a\int_{\text{für } x=0} \varphi(x) X_n(x)\, dx}$$

oder, da ja:

$$\int \varphi(x) X_n(x)\, dx = R_n'(x),$$

so folgt:

$$(6') \qquad \underline{c_n^{(o\,q)} J_n = a \cdot \left(\frac{q}{a}\right)\left\{-R_n(0) + R_n\left(\frac{a}{q}\right)\right\}.}$$

Ebenso wird:

$$(5'') \quad \underline{c_n^{(q\,q)} J_n = \sum_0^r (-1)^r \cdot a\left(\frac{a}{q}\right)^{r+1} \frac{1}{r+2!} \frac{d^r}{dx^r}[\varphi(x) X_n(x)] + a\int_{\text{für } x=} \varphi(x) X_n(x) dx}$$

oder:

$$(6'') \qquad \underline{c_n^{(q\,q)} J_n = a \cdot \left(\frac{q}{a}\right)\left\{R_n\left(\frac{q-1}{q}a\right) - R_n(a)\right\}.}$$

In den vorangegangenen Paragraphen haben wir immer die Entwicklung einer stetigen Funktion in einem endlichen Intervalle — in unserem Falle war es das Intervall von -1 bis $+1$ — vorgenommen und nur für ein solches endliches Intervall gelten die Entwicklungen, die wir aufgestellt haben. Es wird nun die Frage naheliegen, ob sich auch Entwicklungen nach solchen Funktionen, die für ein unendlich großes Intervall definiert sind, aufstellen lassen. Diese Frage ist zu bejahen. Schon P. L. Tschebyscheff hat sich mit dieser Aufgabe beschäftigt. Die Entwicklungsfunktionen, die hier vor allen Dingen in Frage kommen, sind die von Hermite und die von Sonin. Hermite definiert Funktionen für das Intervall von $-\infty$ bis $+\infty$, während die von Sonin eingeführten Funktionen in dem Intervalle 0 bis $+\infty$ definiert sind.

Es soll nun die Aufgabe der beiden folgenden Paragraphen sein, zu untersuchen, ob sich die Borelsche Funktion $\varphi_{pq}(x)$ mit Hilfe dieser Funktionen in der gewünschten Weise darstellen läßt.

§ 5.

Entwicklung nach den Polynomen von Hermite.

Die von Hermite*) zuerst aufgestellten und näher untersuchten Funktionen sind durch folgende Gleichung definiert:

$$U_n(x) = e^{\frac{a}{2}x^2}\frac{d^n e^{-\frac{a}{2}x^2}}{dx^n}.$$

$U_n(x)$ läßt sich auch schreiben in der Form:

$$U_n(x) = a^n x^n - \frac{n(n-1)}{2}a^{n-1}x^{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2\cdot 4}a^{n-2}x^{n-4} + \cdots$$

Ordnet man hierin nach steigenden Potenzen von x, so geht diese Funktion über in:

$$(-1)^{\frac{n}{2}}U_n(x)\cdot\frac{a^{-\frac{n}{2}}}{1\cdot 3\cdot 5\cdots n-1} = 1 - \frac{n\,a\,x^2}{1\cdot 2} + \frac{n(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}a^2x^4 - \frac{n(n-2)(n-4)}{6!}a^3x^6 + \cdots$$

und in: für gerades n

$$(-1)^{\frac{n-1}{2}}U_n(x)\frac{a^{-\left(\frac{n-1}{2}\right)}}{1\cdot 3\cdot 5\cdots n} = x - \frac{(n-1)\,a\,x^3}{3!} + \frac{(n-1)(n-2)\,a^2x^5}{5!} - \frac{(n-1)(n-3)(n-5)\,a^3x^7}{7!} + \cdots$$

für ungerades n

*) Comptes Rendus t. 58 (1864) p. 93, 263. — Diese Polynome sind auch von Tschebyscheff untersucht worden. Mémoires de l'Académie de St. Pétersbourg, 1860. — Betr. Literaturangaben vergleiche die schon mehrfach erwähnte Arbeit von Burkhardt § 85.

Zwischen je drei aufeinanderfolgenden Funktionen dieser Art besteht die Relation:

$$U_{n+1}(x) - a x U_n(x) + a n U_{n-1}(x) = 0;$$

auch läßt sich leicht zeigen, daß diese Funktionen $U_n(x)$ einer Differentialgleichung 2. Ordnung genügen und zwar der folgenden:

$$U_n''(x) - a x U_n'(x) + a n U_n(x) = 0,$$

die man offenbar auch folgendermaßen schreiben kann:

$$\frac{d}{dx}\left\{e^{-\frac{a}{2}x^2}\frac{dU_n(x)}{dx}\right\} + a n e^{-\frac{a}{2}x^2} U_n(x) = 0.$$

Es existieren dann noch folgende Integralsätze:

$$\begin{cases} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{a}{2}x^2} U_n(x)\, U_m(x) = 0, & \text{für } n \neq m \\ \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{a}{2}x^2} U_n(x)\, U_n(x)\, dx = a^n \cdot n! \sqrt{\frac{2\pi}{a}}, & \text{für } n = m \end{cases}$$

welche auf die Möglichkeit der Entwicklung einer Funktion $F(x)$ in eine Reihe von der Form $\sum A_n U_n(x)$ schließen lassen.

Wir gehen nun gleich dazu über, die Borelsche Funktion $\varphi_{pq}(x)$ in dem beliebig großen Intervalle $(0, d)$ in eine solche Reihe zu entwickeln und setzen also:

(1) $$\varphi_{pq}(x) = \sum_{a,\infty}^{n} c_n^{(pq)} U_n(x).$$

Dann ist:

$$c_n^{(pq)} = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_{pq}(x) e^{-\frac{a}{2}x^2} U_n(x)\, dx}{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{a}{2}x^2} U_n(x)\, U_n(x)\, dx},$$

oder:

$$c_n^{(pq)} \cdot a^n \cdot n! \sqrt{\frac{2\pi}{a}} = \int_{\frac{p-1}{q}d}^{\frac{pd}{q}} e^{-\frac{a}{2}x^2} [qx - (p-1)d] U_n(x)\, dx + \int_{\frac{pd}{q}}^{\frac{p+1}{q}d} e^{-\frac{a}{2}x^2} [-qx + (p+1)d] U_n\, x)\, dx.$$

Zur Berechnung der hier stehenden bestimmten Integrale bedienen wir uns der folgenden Beziehungen. Es ist:

$$\int_0^x e^{-\frac{a}{2}x^2} U_n(x)\,dx = -\frac{1}{an}\int_0^x \frac{d}{dx}\left\{e^{-\frac{a}{2}x^2}\frac{dU_n(x)}{dx}\right\}dx$$

und da:

$$\frac{dU_n(x)}{dx} = -anU_{n-1}(x),$$

so folgt:

$$\int_0^x e^{-\frac{a}{2}x^2} U_n(x)\,dx = e^{-\frac{a}{2}x^2} U_{n-1}(x).$$

Weiter erhalten wir durch partielle Integration:

$$\int_0^x e^{-\frac{a}{2}x^2} x\,U_n(x)\,dx = e^{-\frac{a}{2}x^2}\{x\,U_{n-1}(x) - U_{n-2}(x)\}$$

$$= e^{-\frac{a}{2}x^2}\frac{anx\,U_{n-1}(x) + U_n(x)}{a\cdot n-1}.$$

Der Koeffizient $c_n^{(pq)}$ läßt sich jetzt in die folgende Gestalt bringen:

$$(2)\qquad a^n n!\sqrt{\frac{2\pi}{a}}\cdot c_n^{(pq)} = \frac{1}{a\cdot(n-1)}\{A_{p-1} - 2A_p + A_{p+1}\}$$

mit der abkürzenden Bezeichnung:

$$A_r = -e^{-\frac{a}{2}\left(\frac{rd}{q}\right)^2}\left\{ard\,U_{n-1}\left(\frac{rd}{q}\right) + q\,U_n\left(\frac{rd}{q}\right)\right\}.$$

Es wird sich nun darum handeln, die Art der Konvergenz der durch (1) gegebenen Entwicklung festzustellen und wir müssen zu diesem Zwecke das Verhalten der Funktion $U_n(x)$ untersuchen, wenn n immer mehr wächst. Um für immer größer werdende Werte des Stellenzeigers n einen asymptotischen Ausdruck für die Hermiteschen Polynome abzuleiten, gehen wir von der Integraldarstellung der U-Funktion aus.

Diese Funktionen $U_n(x)$ treten nämlich auf als Entwicklungskoeffizienten der Funktion: $e^{-\frac{a}{2}h(2x+h)}$ nach Potenzen von h; es ist:

$$e^{-\frac{a}{2}h(2x+h)} = \sum_0^\infty \frac{h^n}{n!}U_n(x) = e^{-\frac{a}{2}(x+h)^2+\frac{a}{2}x^2}.$$

Man erhält dann für $U_n(x)$ folgende Integralausdrücke:

$$U_n(x) = (-1)^{\frac{n}{2}} 2^n \sqrt{\frac{2}{\pi a}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{a^2 x^2 - 4t^2}{2a}} t^n \cos 2xt\, dt \quad \text{für gerades } n$$

$$U_n(x) = (-1)^{\frac{n+1}{2}} 2^n \sqrt{\frac{2}{\pi a}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{a^2 x^2 - 4t^2}{2a}} t^n \sin 2xt\, dt \quad \text{für ungerades } n.$$

Diese Darstellung findet sich bei Kiehl.[1]) Anderseits kam Mehler[2]) gelegentlich einer Arbeit über die Kugelfunktionen höherer Ordnung auf Funktionen, die er mit $x^{(n)}$ bezeichnet und die sich von den Hermiteschen Funktionen nur durch einen Zahlenfaktor unterscheiden. Setzen wir einmal $a = 2$, so ist nämlich:

$$x^{(n)} = (-2)^{-n} e^{+x^2} \frac{d^n e^{-x^2}}{dx^n} = (-2)^{-n} U_n(x).$$

Für diese Funktionen $x^{(n)}$ führt Mehler dann noch die folgende Darstellung durch ein bestimmtes Integral an. Es ist:

$$U_n(x) = (-2)^n \cdot \frac{i^{-n}}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(t-xi)^2} t^n\, dt.$$

Dieses Integral stimmt mit dem von Kiehl angegebenen überein, wie man sich leicht überzeugen kann.

Zu dem allgemeineren Falle, wo a nicht den speziellen Wert 2 hat, gelangt man von hier durch die Substitutionen:

$$x = \sqrt{\frac{a}{2}} x', \quad t = \sqrt{\frac{2}{a}} t';$$

dann geht das Integral über in das folgende:

$$U_n(x) = (-2)^n \sqrt{\frac{2}{a\pi}} i^{-n} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\left[\sqrt{\frac{2}{a}} t - i\sqrt{\frac{a}{2}} x\right]^2} t^n dt,$$

worin für x' und t' die Bezeichnung x und t gewählt ist.

Wir wollen diesen Ausdruck jetzt in geeigneter Weise umzuformen suchen. Wir bemerken, daß wir schreiben können:

---

1) Kiehl, Inauguraldissertation, Greifswald 1866.

2) Mehler, Über die Entwicklung einer Funktion von beliebig vielen Variabeln nach Laplaceschen Funktionen höherer Ordnung. Crelle, Bd. 66 (1866) S. 174 sequ.

$$i^{-n} \cdot e^{2txi} = e^{\left(2tx - \frac{n\pi}{2}\right)i} = \cos\left(2tx - \frac{n\pi}{2}\right) + i\sin\left(2tx - \frac{n\pi}{2}\right)$$

und erhalten damit:

$$U_n(x) = (-2)^n \cdot \sqrt{\frac{2}{a\pi}}\, e^{\frac{a}{2}x^2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{2}{a}t^2} t^n \left[\cos\left(2tx - \frac{n\pi}{2}\right) + i\sin\left(2tx - \frac{n\pi}{2}\right)\right] dt.$$

Je nachdem nun n eine gerade oder ungerade Zahl, erhalten wir einen der oben stehenden Integralausdrücke für die Funktionen $U_n(x)$.

Wir wollen jetzt das Integral weiter transformieren, indem wir setzen:

$$t = \frac{\sqrt{an}}{2} + \vartheta.$$

Dann folgt:

$$e^{-\frac{2}{a}t^2} = e^{-\frac{n}{2} - \frac{2\vartheta^2}{a} - 2\vartheta\sqrt{\frac{n}{a}}},$$

$$t^n = e^{n\lg\sqrt{\frac{an}{4}} + n\lg\left(1 + \vartheta\frac{2}{\sqrt{an}}\right)};$$

$$e^{-\frac{2t^2}{a}} \cdot t^n = \left(\frac{\sqrt{an}}{2}\right)^n e^{-\frac{n}{2} - \frac{2\vartheta^2}{a} - \left[2\vartheta\sqrt{\frac{n}{a}} - n\lg\left(1 + \vartheta\sqrt{\frac{4}{an}}\right)\right]},$$

und es ist:

$$U_n(x) = (-2)^n \sqrt{\frac{2}{a\pi}}\, e^{\frac{a}{2}x^2} \cdot 2\left(\sqrt{\frac{an}{4}}\right)^n e^{-\frac{n}{2}} \int_{-\frac{\sqrt{an}}{2}}^{\infty} e^{-\frac{2\vartheta^2}{a} - \theta} \cos\left[x\sqrt{an} + 2x\vartheta - \frac{n\pi}{2}\right] d\vartheta.$$

Dabei ist zur Abkürzung gesetzt:

$$\theta = 2\vartheta\sqrt{\frac{n}{a}} - n\lg\left(1 + \vartheta\sqrt{\frac{4}{an}}\right).$$

Wir zerlegen nun das Integral in drei andere J_1, J_2, J_3 mit den bez. Grenzen: $-\frac{\sqrt{an}}{2}, -m$; $-m, +m$; m, ∞, wobei m positiv und $< \sqrt{\frac{na}{4}}$ angenommen werde. Innerhalb der Integrationsgrenzen ist dann θ offenbar beständig positiv; es sind daher J_1 und J_3 verschwindend klein, sofern nur m mit n zugleich unendlich wird. Man kann aber die Größe m zugleich so langsam wachsen lassen, daß in J_2 beständig $\frac{2\vartheta^2}{a} = \theta$ ist; dann wird:

$$J_2 = \cos\left[x\sqrt{an} - \frac{n\pi}{2}\right] \int_{-m}^{+m} e^{-\frac{4\vartheta^2}{a}} \cos 2x\vartheta\, d\vartheta.$$

Da nun:

$$\int_0^{\infty} e^{-\vartheta'^2} \cos 2x'\vartheta'\, d\vartheta' = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-x'^2},$$

so können wir das Integral J_2 berechnen und zwar ist, da in unserem Falle $\vartheta' = \frac{2\vartheta}{\sqrt{a}}$, $x' = \frac{\sqrt{a}}{2}$:

$$\int_0^\infty e^{-\frac{4\vartheta^2}{a}} \cos 2x\vartheta \, d\vartheta = \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-\frac{ax^2}{4}}.$$

Damit erhalten wir den folgenden asymptotischen Ausdruck für $U_n(x)$:

$$U_n(x) \sim (-2)^n \cdot \sqrt{\frac{2}{a}} e^{\frac{ax^2}{4}} \cdot 2\left(\sqrt{\frac{an}{4}}\right)^n e^{-\frac{n}{2}} \cos\left[x\sqrt{an} - \frac{n\pi}{2}\right].$$

Wir haben uns dabei auf den Fall beschränkt, daß n eine gerade Zahl ist; ganz ebenso können wir natürlich auch das Integral für ungerade n transformieren.

Wir wollen nun untersuchen, ob die durch (1) und (2) gegebene Entwicklung der Funktion $\varphi_{pq}(x)$ gleichmäßig konvergent ist oder nicht.

Der in dem Koeffizienten $c_n^{(pq)}$ auftretende Faktor:

$$\frac{1}{a^n \cdot n! \sqrt{\frac{2\pi}{a}}(n-1)}$$

läßt sich schreiben:

$$\frac{1}{a^n \sqrt{\frac{2\pi}{a}}(n-1)\sqrt{2\pi}\, n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n}}.$$

Die Produkte:

$$\frac{1}{a^n \cdot n! \sqrt{\frac{2\pi}{a}}(n-1)} U_n \cdot U_{n-1} \quad \text{bez.} \quad \frac{1}{a^n \cdot n! \sqrt{\frac{2\pi}{a}}(n-1)} U_n \cdot U_n$$

können demnach, wenn wir für U_n den oben abgeleiteten asymptotischen Wert einsetzen, geschrieben werden:

$$\frac{(-1)^{2n} \cdot 2 \cdot e^{\frac{ax^2}{2}} \cdot 4\cos^2\left[x\sqrt{an} - \frac{n\pi}{2}\right]}{2\pi(n-1)n^{\frac{1}{2}}} = \frac{\Psi}{n^{\frac{3}{2}}}.$$

Dabei sind in Ψ alle von n unabhängigen Faktoren enthalten.

Die Glieder der Reihe (1) werden also mit wachsenden Werten von n unendlich groß wie $\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$.

Wir finden damit das folgende **Resultat.**

Die Borelsche Funktion $\varphi_{pq}(x)$ läßt sich in dem beliebig großen Intervalle $(0, d)$ in eine nach den Hermiteschen Funktionen fortschreitende gleichmäßig konvergierende Reihe:

$$\varphi_{pq}(x) = \sum_{0}^{\infty} c_n^{(pq)}\, U_n(x)$$

entwickeln. Die Glieder der Entwicklung werden unendlich klein wie $\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$.

---

§ 6.

Die T-Funktionen und ihre Anwendung auf unser Problem.

Eine andere Klasse von Funktionen, die für ein unendlich großes Intervall definiert sind, bilden die zuerst von Sonin[1]) und später von Gegenbauer[2]) näher untersuchten T-Funktionen. Sie treten in einem speziellen Falle auch in einer Arbeit von H. Laurent[3]) auf, in der die bisher zur Entwicklung von $\varphi_{pq}(x)$ angewandten Funktionen von einem gemeinsamen Gesichtspunkte aus behandelt sind.

Sonin bezeichnet als T-Funktion den folgenden Ausdruck:

$$\text{(a)} \qquad T_n^{(m)}(x) = \sum_{0}^{n} \lambda \frac{(-1)^\lambda x^{n-\lambda}}{\lambda!\, \Gamma(n-\lambda)\Gamma(m+n-\lambda)},$$

worin n eine ganze positive Zahl, m eine beliebige Zahl bedeutet.

Nach Gegenbauer kann man diese Funktion auch schreiben in der Form eines Differentialquotienten:

$$\text{(a')} \qquad T_n^{(m)}(x) = \frac{(-1)^\lambda e^x x^{-m}}{\Gamma(n+1)\,\Gamma(m+n+1)} \cdot \frac{d^n}{dx^n}\{e^{-x} x^{m+n}\}.$$

Diese T-Funktionen genügen einer Differentialgleichung 2. Ordnung:

$$\text{(b)} \qquad \frac{d^2 T_n^{(m)}(x)}{dx^2} - \left(1 - \frac{m+1}{x}\right) \frac{d\, T_n^{(m)}(x)}{dx} + \frac{n}{x} T_n^{(m)}(x) = 0,$$

oder in anderer Schreibweise (Gegenbauer):

$$\text{(b')} \qquad \frac{d}{dx}\left\{e^{-x} x^{m+1} \frac{d\, T_n^{(m)}(x)}{dx}\right\} + n e^{-x} x^m T_n^{(m)}(x) = 0.$$

Die Funktionen mit verschiedenen Indices n sind durch eine Anzahl von Beziehungen miteinander verbunden:

---

1) Sonin, Math. Annalen, Bd. 16 (1880) Nr. 40 S. 41.

2) Gegenbauer, Wiener Sitzungsberichte Bd. 95_2 (1887) S. 274.

3) Laurent, Sur le calcul inverse des intégrales définies, Journal de Mathématique, 3. série t. 4 (1878), p 225.

Siehe auch Burkhardt (a. a. O.).

(c) $$(m+n+1)\frac{d\,T_{n+1}^{(m)}(x)}{dx} = T_n^{(m)}(x) - \frac{d\,T_n^{(m)}(x)}{dx},$$

(d) $$\frac{T_{n-1}^{(m)}(x)}{x^{n-1}} = -\frac{d}{d\left(\frac{1}{x}\right)}\,\frac{T_n^{(m)}(x)}{x^n},$$

(e) $$\frac{d\,T_n^{(m)}(x)}{dx} = T_{n-1}^{(m+1)}(x).$$

Aus (d) folgt weiter:

(f) $$x\frac{d\,T_n^{(m)}(x)}{dx} = n\,T_n^{(m)}(x) + T_{n-1}^{(m)}(x).$$

Ersetzt man in dieser Gleichung n durch $(n+1)$, so erhält man mit Hilfe von (c) und (f) noch die folgende Relation:

(g) $$(n+1)(m+n+1)\,T_{n+1}^{(m)}(x) + (m+2n-1-x)\,T_n^{(m)}(x) + T_{n-1}^{(m)}(x) = 0.$$

Sonin gibt noch das folgende Integraltheorem an, welches für die Entwicklung einer beliebigen stetigen Funktion in eine nach den $T_n^{(m)}$ fortschreitende Reihe von Bedeutung ist:

(h)
$$\begin{cases} \int_0^\infty e^{-x}x^m\,T_n^{(m)}(x)\,T_\gamma^{(m)}(x)\,dx = 0, & \text{für } n \neq \gamma \\ \int e^{-x}x^m\,T_n^{(m)}(x)\,T_n^{(m)}(x)\,dx = \frac{1}{\Gamma(n+m+1)\,\Gamma(n+1)}. & (n=\gamma) \end{cases}$$

Gegenbauer hat gezeigt, daß man zu den T-Funktionen gelangt, wenn man die Exponentialfunktion e^{kx} nach Potenzen von α entwickelt, und zwar ist:

(i) $$(1+\alpha)^{-m-1}e^{\frac{\alpha x}{1+\alpha}} = \sum_0^\infty \Gamma(m+n+1)\,T_n^{(m)}(x)\,\alpha^n = \sum_0^\infty \Pi_n^{(m)}(x)\,\alpha^n.$$

Dann kann man bekanntlich für $\Pi_n^{(m)}(x)$ auch schreiben:

(k) $$\Gamma(m+n+1)\,T_n^{(m)}(x) = \Pi_n^{(m)}(x) = \frac{1}{2\pi i}\int \frac{e^{\frac{\alpha x}{1+\alpha}}}{(1+\alpha)^{1+m}}\,\frac{d\alpha}{\alpha^{n+1}}.$$

Setzt man hier $t = -\alpha$, so folgt:

(k′) $$\Pi_n^{(m)}(x) = \frac{1}{2\pi i}\int \frac{e^{-\frac{tx}{1-t}}}{(1-t)^{m+1}}\,\frac{dt}{t^{n+1}} = \frac{1}{2\pi i}e^{-x}\int \frac{e^{\frac{x}{1-t}}}{(1-t)^{m+1}}\,\frac{dt}{t^{n+1}},$$

und wenn weiter gesetzt wird:

$$\frac{t}{1-t} = z,$$

so folgt:

(k″) $$\Pi_n^{(m)}(x) = \frac{1}{2\pi i}\int \frac{e^{-zx}}{z^{n+1}}(1+z)^{m+n}\,dz.$$

Jedes der Integrale (k), (k′), (k″) ist hierbei über einen Kreis um den Nullpunkt herum zu erstrecken. Den besonderen Fall $m = 0$ hat Laurent (a. a. O.) behandelt.

Die eben angegebenen Integrale sind nun von der Form:

$$M = \frac{1}{2\pi i}\int F(t)\,\frac{dt}{t^{n+2}} \quad \text{und} \quad J = \frac{1}{2\pi i}\int \varphi^n(z) f(z)\,dz,$$

wobei man von M zu J mit Hilfe der Substitutionen:

$$t = \frac{1}{\varphi(z)}, \quad F(t) = \frac{f(z)}{\varphi'(z)}$$

gelangt. Für Integrale dieser Art haben nun Darboux[1]) und unlängst Hamy[2]) Methoden angegeben zur Bestimmung asymptotischer Werte für den Fall, daß n immer mehr wächst. Im vorliegenden Falle sind aber diese Methoden nicht verwendbar, da die Funktion $F(t)$ in dem dem Nullpunkte nächstgelegenen singulären Punkte $t = +1$ jeden beliebigen Wert annehmen kann. Es ist nämlich hier:

$$F(t) = e^{\frac{x}{1-t}}(1-t)^{-m-1}t.$$

Hier hat nun L. Fejér[3]) die asymptotischen Werte bestimmt. Er betrachtet die Entwicklung:

$$\frac{e^{\frac{1}{t-1}}}{(1-t)^{\varrho}} = \gamma_0 + \gamma_1 \cdot t + \gamma_2 \cdot t^2 + \gamma_3 \cdot t^3 + \cdots + \gamma_n \cdot t^n + \cdots,$$

wo ϱ eine beliebige reelle Zahl ist, und findet:

$$\gamma_n \sim \frac{1}{\sqrt{\pi e}}\,\frac{\sin\left[2\sqrt{n} + \left(\frac{3}{4} - \frac{\varrho}{2}\right)\pi\right]}{n^{\frac{3}{4}-\frac{\varrho}{2}}}.$$

Die linke Seite von (i) läßt sich nun schreiben:

$$(1-t)^{-m-1}\,e^{\frac{-tx}{1-t}} = (1-t)^{-m-1}\,e^{\frac{x}{t-1}} \cdot e^{x}.$$

Wir erhalten somit:

$$\frac{e^{\frac{x}{t-1}}}{(1-t)^{m+1}} = e^{-x}\sum\nolimits_n (-1)^n \Gamma(m+n+1)\,T_n^{(m)}(x) \cdot t^n.$$

Der Koeffizient von t^n nähert sich also dem Werte:

---

1) Darboux (a. a. O.)

2) Hamy, Sur l'approximation des fonctions de grands nombres, Journal de Mathém., 6 série t. 4 (1908).

3) Fejér, Sur une méthode de Darboux. Comptes Rendus, t. 147 (1908) p. 1040.

$$\gamma_n = \frac{(-1)^n}{e}\,\Gamma(m+n+1)\,T_n^{(m)}(1) \sim \frac{1}{\sqrt{\pi e}} \cdot \frac{\sin\left[2\sqrt{n}+\left(\frac{3}{4}-\frac{m+1}{2}\right)\pi\right]}{n^{\left(\frac{3}{4}-\frac{m+1}{2}\right)}},$$

oder:

$$T_n^{(m)} \sim \cdot \sqrt{\frac{e}{\pi}}\, i^{-2n}\, \frac{\sin\left[2\sqrt{n}+\left(\frac{1}{4}-\frac{m}{2}\right)\right]\pi}{\Gamma(m+n+1)\, n^{\left(\frac{1}{4}-\frac{m}{2}\right)}}.$$

Es sollen nunmehr diese Funktionen zur Entwicklung der Borelschen Funktion $\varphi_{pq}(x)$ benutzt werden. Wir haben, wenn das Intervall von 0 bis d reicht:

(1) $$\varphi_{pq}(x) = \sum_0^\infty {}_n c_n^{(pq)}\, T_n^{(m)}(x),$$

wobei die Koeffizienten $c_n^{(pq)}$ folgendermaßen bestimmt sind:

$$c_n^{(pq)} = \frac{\int_0^\infty e^{-x} x^m \varphi_{pq}(x)\, T_n^{(m)}(x)\, dx}{\int_0^\infty e^{-x} x^m\, T_n^{(m)}(x)\, T_n^{(m)}(x)\, dx},$$

oder es ist:

$$\frac{1}{\Gamma(m+n+1)\Gamma(n+1)} c_n^{(pq)} =$$

$$\int_{\frac{p-1}{q}d}^{\frac{pd}{q}} [qx-(p-1)d] x^m e^{-x} T_n^{(m)}(x)\, dx + \int_{\frac{pd}{q}}^{\frac{p+1}{q}d} [-qx+(p+1)d] e^{-x} x^m T_n^{(m)}(x)\, dx.$$

Aus der 2. Form der Differentialgleichung (b′) folgt nun:

$$n \int_0^x e^{-x} x^m T_n^{(m)}(x)\, dx = -\, e^{-x} x^m T_{n-1}^{(m+1)}(x);$$

bei Berücksichtigung von (f) hieraus:

(m) $$\int_0^x e^{-x} x^m T_n^{(m)}(x)\, dx = -\frac{1}{n} e^{-x} x^m [n\, T_n^{(m)}(x) + T_{n-1}^{(m)}(x)].$$

Ferner folgt:

(n) $$\int_0^x x e^{-x} x^m T_n^{(m)}(x)\, dx = \frac{e^{-x} x^m}{n\cdot(n-1)} \{n[(n-1)x-(m+1)] T_n^{(m)}(x) + [nx-(m+1)] T_{n-1}^{(m)}(x)\}.$$

Jetzt läßt sich $c_n^{(pq)}$ auf die Form bringen:

(2) $$c_n^{(pq)} = \frac{\Gamma(m+n+1)\Gamma(n+1)}{n-1} \{A_{p-1} - 2A_p + A_{p+1}\},$$

und dabei ist:

$$A_r = -e^{-\frac{rd}{q}}\left(\frac{rd}{q}\right)^m\left\{q(m+1)T_n^{(m)}\left(\frac{rd}{q}\right) - \frac{1}{n}\left(rd-(m+1)q\right)T_{n-1}^{(m)}\left(\frac{rd}{q}\right)\right\}$$

$$= \frac{1}{n}e^{-\frac{rd}{q}}\left(\frac{rd}{q}\right)^{m+2}T_{n-2}^{(m+2)}\left(\frac{rd}{q}\right).$$

Um die Art der Konvergenz der Entwicklung (1) näher zu untersuchen, wollen wir in (1) für die $T_n^{(m)}(x)$ die asymptotischen Ausdrücke einsetzen; dann erhalten wir:

$$\left| c_n^{(pq)} T_n^{(m)}(x) \right| < \frac{\Gamma(m+n+1)\Gamma(n+1)}{n\cdot(n-1)} \cdot \frac{1}{\Gamma(m+n+1)\Gamma(m+n+1)} \cdot \frac{1}{n^{\frac{1}{4}-\frac{m}{2}}} \cdot \frac{1}{n^{\frac{1}{4}-\frac{m+2}{2}}} \cdot \psi,$$

wo in ψ alle von n unabhängigen Faktoren enthalten sind. Beachtet man weiter, daß:

$$\Gamma(n+p) = \sqrt{2\pi}\, e^{-n} n^{n+p-\frac{1}{2}},$$

so folgt:

$$\left| c_n^{(pq)} T_n^{(m)}(x) \right| < \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(n+m+1)} \cdot \frac{1}{n^{\frac{3}{2}-m}}$$

$$< \frac{n^{n+\frac{1}{2}}}{n^{n+m+\frac{1}{2}}} \cdot \frac{1}{n^{\frac{3}{2}-m}} = \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}.$$

Es folgt somit der folgende **Satz:**

Die Funktion $\varphi_{pq}(x)$ läßt sich in dem vorgelegten Intervalle von 0 bis d (d eine positive Zahl) in eine Reihe von der Form:

$$\varphi_{pq}(x) = \sum_0^\infty {}_n c_n^{(pq)} T_n^{(m)}(x)$$

entwickeln. Diese Reihe konvergiert gleichmäßig, ihre Glieder werden von der $\frac{3}{2}$ten Ordnung unendlich klein.

---

§ 7.

Darstellung der Funktion $\varphi_{pq}(x)$ durch trigonometrische Funktionen.

Daß man die Funktion $\varphi_{pq}(x)$, wie sie Borel definiert, in eine trigonometrische Reihe entwickeln kann, die im vorgelegten Intervalle gleichmäßig konvergiert, ist für die Darstellung durch eine Kosinusreihe von Krause (a. a. O.) bereits gezeigt worden. Daß man sie natürlich ebenso durch eine Sinusreihe oder durch eine nach Sinus und Kosinus fortschreitende Reihe darstellen kann, läßt sich leicht zeigen.

Man kann damit den folgenden Satz aussprechen:

Unter der Annahme, daß $a = \pi$ ist, läßt sich die Borelsche Funktion $\varphi_{pq}(x)$ im Intervalle von $x = 0$ bis $x = \pi$ in folgender Weise durch trigonometrische Reihen darstellen:

(1) $$\varphi_{pq}(x) = \frac{b_0}{2} + \sum_1^\infty{}_r b_r \cos rx \ ;$$

(2) $$\varphi_{pq}(x) = \sum_1^\infty{}_r a_r \sin rx \ ;$$

(3) $$\varphi_{pq}(x) = \frac{b_0}{2} + \sum_1^\infty{}_r b_r \cos rx + \sum_1^\infty{}_r a_r \sin rx \ ,$$

wenn p eine der Zahlen $1, 2, 3, \ldots (q-1)$ bedeutet. Die Koeffizienten haben dabei die folgende Gestalt:

$$b_r = \frac{1}{\pi}\int_{\frac{p-1}{q}\pi}^{\frac{p\pi}{q}} \left(qx - (p-1)\pi\right)\cos rx\, dx + \frac{1}{\pi}\int_{\frac{p\pi}{q}}^{\frac{p+1}{q}\pi} \left(-qx + (p+1)\pi\right)\cos rx\, dx,$$

$$a_r = \frac{1}{\pi}\int_{\frac{p-1}{q}\pi}^{\frac{p\pi}{q}} \left(qx - (p-1)\pi\right)\sin rx\, dx + \frac{1}{\pi}\int_{\frac{p\pi}{q}}^{\frac{p+1}{q}\pi} \left(-qx + (p+1)\pi\right)\sin rx\, dx,$$

oder:

(4) $$\left\{\begin{array}{l} b_0 = \frac{2\pi}{q} \\ b_r = \frac{2q}{r^2\pi}\left(-\cos r\frac{p-1}{q}\pi + 2\cos r\frac{p\pi}{q} - \cos r\frac{p+1}{q}\pi\right) \end{array}\right.$$

(4a) $$= \frac{8q}{r^2\pi}\sin^2\frac{r\pi}{2q}\cos\frac{rp\pi}{q};$$

(5) $$a_r = \frac{2q}{r^2 p}\left(-\sin r\frac{p-1}{q}\pi + 2\sin r\frac{p\pi}{q} - \sin r\frac{p+1}{q}\pi\right)$$

(5a) $$= \frac{8\cdot q}{r^2\pi}\sin^2\frac{r\pi}{2q}\sin\frac{r\pi p}{q}.$$

Die Reihen konvergieren gleichmäßig im vorgelegten Intervalle.

Die durch (3) gegebene Entwicklung kann man, wenn man die Gleichungen (4a) und (5a) berücksichtigt, auch in der folgenden Weise schreiben:

(3′) $$\varphi_{pq}(x) = \frac{b_0}{2} + \frac{8q}{\pi}\sum_1^\infty{}_r \frac{1}{r^2}\sin^2\frac{r\pi}{2q}\cos r\left(\frac{p\pi}{q} - x\right).$$

In den Grenzintervallen treten kleine Modifikationen der Resultate ein. Man erhält nämlich:

(6) für $p = 0$:
$$\begin{cases} b_0 = \frac{\pi}{q}, \\ b_r = \frac{2q}{r^2\pi}\left(1 - \cos\frac{r\pi}{q}\right); \end{cases}$$

(7) für $p = q$:
$$\begin{cases} b_0 = \frac{\pi}{q}, \\ b_r = \frac{2q}{r^2\pi}\left(1 - \cos\frac{r\pi}{q}\right)\cos r\pi; \end{cases}$$

(8) für $p = 0$:
$$a_r = \frac{2q}{r^2\pi}\left\{\frac{r\pi}{q} - \sin\frac{r\pi}{q}\right\};$$

(9) für $p = q$:
$$a_r = \frac{2q}{r^2\pi}\left\{-\frac{r\pi}{q} + \sin\frac{r\pi}{q}\right\}\cos r\pi.$$

Die Reihe (2) läßt sich, wenn $p = 0$, in folgender Weise schreiben:

$$\varphi_{0q}(x) = \sum_1^\infty{}_r a_r \sin rx = 2\sum_1^\infty{}_r \frac{\sin rx}{r} - \frac{2q}{\pi}\sum_1^\infty{}_r \frac{\sin\frac{r\pi}{q}}{r^2}\sin rx.$$

Die hier auftretende Reihe

(10)
$$\lim_{n=\infty} S_n = S_\infty = \sum_1^\infty{}_r \frac{\sin rx}{r}$$

konvergiert nun auf der Strecke:

$$c \leqq x \leqq \pi - c_1$$

gleichmäßig gegen die Grenze:

$$\frac{\pi - x}{2}.$$

c und c_1 bezeichnen hierbei positive Konstanten, die beliebig klein gewählt werden können. Desgleichen ist:

(11)
$$\lim_{n=\infty} T_n = T_\infty = -\frac{x}{2},$$

wenn wir mit T_∞ die Reihe bezeichnen:

$$T_\infty = \sum_1^\infty{}_r \frac{(-1)^r \sin rx}{r},$$

die wir aus $-S_n$ erhalten, indem wir x durch $\pi - x$ ersetzen.*)

Wir schreiben jetzt unsere Reihe, wenn wir den Wert für S_∞ einsetzen:

(2″)
$$\varphi_{0q}(x) = (\pi - x) - \frac{4q}{\pi}\sum_1^\infty{}_r \frac{\sin\frac{r\pi}{2q}\cos\frac{r\pi}{2q}}{r^2}\sin rx.$$

*) A. Kneser, a. a. O., Math. Annalen, 60. Bd. § 1, S. 402.

Für die Reihe (1) können wir schreiben ($p = 0$):

$$(1'') \qquad \varphi_{oq}(x) = \frac{\pi}{2q} + \frac{4q}{\pi} \sum_{1}^{\infty}{}_r \frac{\sin^2 \frac{r\pi}{2q}}{r^2} \cos rx.$$

Damit sehen wir, daß die Reihe (3) in folgende übergeht:

$$(3'') \qquad \varphi_{oq}(x) = \frac{\pi}{2q} + (\pi - x) - \frac{4q}{\pi} \sum_{1}^{\infty}{}_r \frac{1}{r^2} \sin \frac{r\pi}{2q} \sin r\left(x - \frac{\pi}{2q}\right).$$

Wenn wir dagegen setzen: $p = q$, so folgt für die Reihe (1):

$$(1''') \quad \varphi_{qq}(x) = \frac{\pi}{2q} + \frac{2q}{\pi} \sum_{1}^{\infty}{}_r \frac{1}{r^2} \left(1 - \cos \frac{r\pi}{q}\right) \cos r\pi \cdot \cos rx = \frac{\pi}{2q} + \frac{4q}{\pi} \sum_{1}^{\infty}{}_r \frac{\sin^2 \frac{r\pi}{2q} \cdot \cos r\pi}{r^2} \cos rx;$$

für die Reihe (2):

$$\varphi_{qq}(x) = -2 \sum_{1}^{\infty}{}_r \frac{(-)^r \sin rx}{r} + \frac{2q}{\pi} \sum_{1}^{\infty}{}_r \frac{\sin \frac{r\pi}{q} \cos r\pi}{r^2} \sin rx.$$

Da der Wert der ersten Reihe, die gleich der mit T_∞ bezeichneten ist, bekannt ist, so folgt hieraus:

$$(2''') \qquad \varphi_{qq}(x) = x + \frac{2q}{\pi} \sum_{1}^{\infty}{}_r \frac{\sin \frac{r\pi}{q} \cos r\pi}{r^2} \sin rx.$$

Endlich erhalten wir für die Reihe (3'):

$$(3''') \qquad \varphi_{qq}(x) = \frac{\pi}{2q} + \frac{4q}{\pi} \sum_{1}^{\infty}{}_r \frac{1}{r^2} \sin \frac{r\pi}{2q} \cos r\pi \sin r\left(x + \frac{\pi}{2q}\right).$$

Da die angegebenen Entwicklungen im bezeichneten Intervalle von 0 bis π gleichmäßig konvergieren, so wird es möglich sein müssen, eine ganze Zahl l so zu bestimmen, daß die endliche trigonometrische Reihe $\psi_{pq}(x)$ die Funktion $\varphi_{pq}(x)$ mit der vorgeschriebenen Genauigkeit $\frac{3}{q^2}$ darstellt. Man findet, daß dies jedenfalls der Fall ist, wenn $l = q^3$ ist.

Die Entwicklung von cos bez. sin in eine unendliche Reihe, führt, wie Krause zeigt, auf die Darstellung der Funktion $\varphi_{pq}(x)$ durch ultrabernoullische Funktionen. Wir wollen darauf nicht eingehen.

Wir haben uns bisher mit dem Problem beschäftigt, eine im Intervalle von 0 bis π stetige Funktion $f(x)$ in eine in diesem Intervalle gleichmäßig konvergierende Reihe zu entwickeln, deren Glieder

sich in gleichmäßig konvergente Reihen, die nach vorgeschriebenen Funktionen fortschreiten, entwickeln lassen. Wir hatten gesetzt:

$$f(x) = \lim_{q=\infty} \frac{1}{\pi} \sum_{p=0}^{p=q} f\left(\frac{p\pi}{q}\right) \varphi_{pq}(x).$$

Die Annahme, daß $f(x)$ eine periodische Funktion mit der Periode π ist, legt den Gedanken nahe, die Funktion $\varphi_{pq}(x)$ ebenfalls periodisch zu wählen. Dann läßt sich, wie Fréchet[1]) bemerkt hat, $f(x)$ folgendermaßen darstellen:

$$f(x) = \lim_{q=\infty} \sum_{p=1}^{q} f\left(\frac{p\pi}{q}\right) S_{pq}(x).$$

Mit dieser Bezeichnung wird man dann, wenn $f(x)$ im Intervalle $(0, \pi)$ zwar stetig, aber nicht periodisch ist, schreiben können:

$$F(x) = \lim_{q=\infty} \sum_{1}^{q} F\left(\frac{p\pi}{q}\right) S_{pq}(x);$$

und es wird $F(x)$ gleich $\frac{f(0)+f(\pi)}{2}$ sein für $x = 0$ und für $x = \pi$, jedoch gleich $f(x)$ für alle übrigen Werte von x. Für $S_{pq}(x)$ gibt Fréchet dann noch die durch (3′) gegebene Darstellung.

Der Gedanke, periodische Funktionen durch derartige periodische Funktionen zu ersetzen, wie wir es eben getan haben, ist übrigens nicht neu. Schon A. Toepler[2]) hat darauf aufmerksam gemacht, daß man Funktionen, die nach Fourier in Reihen durch die Sinus und Kosinus ganzer Vielfacher entwickelt werden können, in zahlreichen Fällen auch darstellen kann durch andere periodische Funktionen.

Sei $y = \pm f[\pm (x - \varrho 2\pi)]$ eine periodische Funktion [Periode 2π] und ϱ bedeute dabei diejenige ganze Zahl, die dem Werte $\frac{x}{2\pi}$ am nächsten liegt. Dann muß für alle Werte von x von $-\infty$ bis $+\infty$ die Gleichung erfüllt sein:

$$\pm f[\pm (x - \varrho 2\pi)] = \alpha_1 \sin x + \alpha_2 \sin 2x + \alpha_3 \sin 3x + \cdots \quad \text{(S. 5)}.$$

Toepler fragt nun (§ 2), ob sich eine solche Funktion dazu benutzen läßt, um nach ihr andere Funktionen in einer analogen Weise in Reihen zu entwickeln, wie es nach Fourier durch die Sinus ganzer Vielfacher von x geschieht. Sei eine solche zweite Funktion zwischen den Grenzen 0, π dargestellt durch:

(a) $$F(x) = a_1 \sin x + a_2 \sin 2x + a_3 \sin 3x + \cdots$$

1) M. Fréchet; Formule d'interpolation des fonctions périodiques continues. Comptes Rendus 141 (1905) S. 818.

2) A. Toepler; Über eine Erweiterung der periodischen Reihenentwicklung und deren physikalische Deutung. Mitteilungen des naturwissenschaftl. Vereins in Steiermark. Jahrgang 1872.

Ist nicht eine ähnliche Reihenentwicklung für $F(x)$ möglich, in der wir anstelle von sin die kompliziertere Funktion:

$$y = \alpha_1 \sin x + \alpha_2 \sin 2x + \cdots$$

treten lassen? Toepler setzt nun, indem er mit m einen veränderlichen Parameter einführt, der der Reihe nach die ganzen Zahlen durchläuft:

(b) $\quad y_m = \alpha_1 \sin mx + \alpha_2 \sin 2mx + \cdots = \pm f[\pm (mx - \varrho_m 2\pi)].$

und bildet dann die Reihe:

(c) $\qquad F(x) = A_1 y_1 + A_2 y_2 + A_3 y_3 + \cdots$

oder:

(d) $F(x) = \pm A_1 f[\pm (x - \varrho_1 2\pi)] \pm A_2 f[\pm (2x - \varrho_2 2\pi)] \pm A_3 f[\pm (3x - \varrho_3 2\pi)] \pm \cdots$

Er kommt dann zu dem folgenden Ergebnis: „Wenn bei der Entwicklung irgendeiner Funktion $F(x)$ gemäß Gleichung (d) durch irgendeine zweite Funktion $f(x)$ eine absolut konvergente Koeffizientenreihe zum Vorschein kommt, so ist $F(x)$ auch jedenfalls entwickelbar nach allen Funktionen $\varphi(x)$ und $\psi(x)$ usw., welche sich zur Darstellung von $f(x)$ als geeignet erwiesen haben." (S. 12).

Wir erkennen, wenn wir für $f(x)$ die Funktion $S_{pq}(x)$ und für die Konstanten A die speziellen Funktionswerte $F\left(\frac{p\pi}{q}\right)$ wählen würden, daß wir dann gerade das von Borel resp. Fréchet angegebene Problem haben. Toepler hält jedoch (S. 35) „die Entwicklung (d) dann für nicht zulässig, wenn die darstellende Funktion zwischen 0 und π auf einer oder mehreren endlichen Strecken den konstanten Wert Null hat, während zugleich die darzustellende Funktion innerhalb derselben Grenzen von Null verschieden ist." Wir haben aber gerade die Funktion $S_{pq}(x)$ dadurch definiert, daß sie nur in dem Teilintervalle $\left(\frac{p-1}{q}\pi, \frac{p+1}{q}\pi\right)$ von Null verschieden ist, außerhalb dieses Intervalls aber den Wert Null hat.

Toepler überträgt dann seine Resultate auf Funktionen, die in einem weiteren Sinne periodisch sind (§ 7). Das Intervall 0 bis π, welches bisher maßgebend war für die darzustellende Funktion, läßt sich auf das Intervall mit den Grenzen $0, l$ transformieren, indem nur zu setzen ist: $x = x' \cdot \frac{\pi}{l}$. Dann erhält man aus (d)

(e) $\quad F\left(\frac{\pi x'}{l}\right) = \pm A_1 f\left[\pm \frac{\pi}{l}(x' - \varrho_1 2l)\right] \pm A_2 f\left[\pm \frac{\pi}{l}(2x' - \varrho_2 2l)\right] \pm \cdots$

Das Verfahren dieser Reihenentwicklung gilt natürlich auch, wenn y sowohl, als auch $F(x)$ durch Kosinusreihen dargestellt werden können.

In diesem Falle setzt Toepler [§ 6]:

$$(f) \qquad F(x) = \frac{B_0}{2} + B_1 y_1 + B_2 y_2 + \cdots + B_n y_n + \cdots;$$

die Glieder dieser Reihe sind durch die Gleichung definiert:

$$(g) \quad y_m = \frac{\beta_0}{2} + \beta_1 \cos mx + \beta_2 \cos 2mx + \cdots = f[\pm (mx - \varrho_m 2\pi)].$$

Anderseits soll gelten:

$$(h) \qquad F(x) = \frac{b_0}{2} + b_1 \cos x + b_2 \cos 2x + \cdots$$

Dann zieht er denselben Schluß betreffend die Gleichwertigkeit der beiden Darstellungen (f) und (h) von $F(x)$ wie bei den Sinusreihen.

Endlich kombiniert er seine Resultate. Sei $Y = F(x)$ die gegebene Funktion, so lasse sich dieselbe in zwei Bestandteile Y_1 und Y_2 derart zerlegen, daß:

$$Y_1 = \frac{F(x) + F(-x)}{2},$$

$$\underline{Y = Y_1 + Y_2,}$$

$$Y_2 = \frac{F(x) - F(-x)}{2}$$

ist. Dann hat man:

$$\underline{Y_1 = \frac{b_0}{2} + b_1 \cos x + b_2 \cos 2x + \cdots}$$

$$\underline{Y_2 = a_1 \sin x + a_2 \sin 2x + \cdots}$$

Man habe nun 2 Funktionen $\varphi(x)$ und $\psi(x)$ derart gewählt, daß:

$$\varphi(x) = \frac{\beta_0}{2} + \beta_1 \cos x + \beta_2 \cos 2x + \cdots$$

$$\psi(x) + \alpha_1 \sin x + \alpha_2 \sin 2x + \cdots$$

und sich überzeugt, daß Y_1 und Y_2 durch $\varphi(x)$ und $\psi(x)$ periodisch darstellbar sind; dann ist bewiesen, daß

$$\underline{F(x) = \frac{B_0}{2} + B_1 \varphi[\pm (x - \varrho_1 2\pi)] + B_2 \varphi[\pm (2x - \varrho_2 2\pi)] + \cdots}$$

$$\underline{+ A_1 \psi[\pm (x - \varrho_1 2\pi)] + A_2 \psi[\pm (2x - \varrho_2 2\pi)] + \cdots}$$

Toepler zeigt zum Schluß an einer Anzahl von Beispielen die Richtigkeit seiner Schlüsse.

Wir wollen jetzt annehmen, daß wir eine ganze Zahl l derart bestimmt haben, daß die Funktion:

$$\underline{P_{pq}(x) = \frac{b_0}{2} + b_1 \cos x + b_2 \cos 2x + \cdots + b_{l-1} \cos (l-1)x}$$

die Funktion $\varphi_{pq}(x)$ mit der gewünschten Annäherung darstellt. Dann werden wir, da wir es mit einer endlichen Anzahl von Gliedern zu tun

haben, offenbar die Reihenfolge der Glieder beliebig ändern können, — was im allgemeinen für die unendlichen Reihen natürlich nicht zulässig ist. Wir sind jedenfalls berechtigt, den folgenden Ansatz zu machen:

$$f(x) = \frac{B_0}{2} + B_1 \cos x + B_2 \cos 2x + \cdots + B_{l-1} \cos (l-1)x.$$

Es ist nämlich:

$$\begin{aligned}
f(x) = \frac{1}{\pi} f(0) \Big\{ & \frac{\pi}{2q} + \frac{2q}{\pi}\Big(1 - \cos\frac{\pi}{q}\Big)\cos x + \frac{2q}{4\pi}\Big(1 - \cos\frac{2\pi}{q}\Big)\cos 2x + \cdots \\
& + \frac{2q}{(l-1)\pi}\Big(1 - \cos\frac{(l-1)\pi}{q}\Big)\cos(l-1)x\Big\} \\
+ \frac{1}{\pi}\sum_1^{q-1}{}_p f\Big(\frac{p\pi}{q}\Big) \Big\{ & \frac{\pi}{q} + \frac{2q}{\pi}\Big[-\cos\frac{p-1}{q}\pi + 2\cos\frac{p\pi}{q} - \cos\frac{p+1}{q}\pi\Big]\cos x \\
& + \frac{2q}{\pi 2^2}\Big[-\cos 2\frac{p-1}{q}\pi + 2\cos 2\frac{p\pi}{q} - \cos 2\frac{p+1}{q}\pi\Big]\cos 2x + \cdots \\
& + \frac{2q}{\pi\cdot(l-1)^2}\Big[-\cos\frac{(l-1)(p-1)}{q}\pi + 2\cos\frac{(l-1)p\pi}{q} - \cos\frac{(l-1)(p+1)}{q}\pi\Big]\cos(l-1)x\Big\} \\
+ \frac{1}{\pi} f(\pi) \Big\{ & \frac{\pi}{2q} + \frac{2q}{\pi}\Big(1 - \cos\frac{\pi}{q}\Big)\cos\pi\cos x + \frac{2q}{2^2\cdot\pi}\Big(1 - \cos\frac{2\pi}{q}\Big)\cos 2\pi\cos 2x + \cdots \\
& + \frac{2q}{(l-1)^2\pi}\Big(1 - \cos\frac{(l-1)\pi}{q}\Big)\cos(l-1)\pi\cos(l-1)x\Big\}.
\end{aligned}$$

Faßt man die Glieder mit den Faktoren $\cos rx$ ($r = 0, 1, 2, \ldots (l-1)$) zusammen, so erhält man

$$\left\{\begin{aligned}
B_0 &= \frac{1}{q}\Big\{f(0) + 2\sum_1^{q-1}{}_p f\Big(\frac{p\pi}{q}\Big) + f(\pi)\Big\}, \\
B_r &= \frac{2q}{r^2\pi^2}\Big\{\Big(1 - \cos\frac{r\pi}{q}\Big)f(0) + \sum_1^{q-1}{}_p\Big(-\cos r\frac{p-1}{q}\pi + 2\cos r\cdot\frac{p\pi}{q} - \cos r\cdot\frac{p+1}{q}\pi\Big) f\Big(\frac{p\pi}{q}\Big) \\
&\qquad + \Big(1 - \cos\frac{r\pi}{q}\Big)\cos r\pi\, f(\pi)\Big\}.
\end{aligned}\right.$$

Die Koeffizienten sind unabhängig von der Zahl l. Wir können sie noch geeignet transformieren; dazu beachte man, daß:

$$\begin{aligned}
& \sum_1^{q-1}{}_p\Big(-\cos r\frac{p-1}{q}\pi + 2\cos r\frac{p\pi}{q} - \cos r\frac{p+1}{q}\pi\Big) f\Big(\frac{p\pi}{q}\Big) = \\
= & -\Big(1 - \cos\frac{r\pi}{q}\Big) f\Big(\frac{\pi}{q}\Big) + \Big(\cos\frac{r\pi}{q} - \cos\frac{2r\pi}{q}\Big) f\Big(\frac{\pi}{q}\Big) - \Big(\cos\frac{r\pi}{q} - \cos\frac{2r\pi}{q}\Big) f\Big(\frac{2\pi}{q}\Big) \\
& + \Big(\cos\frac{2r\pi}{q} - \cos\frac{3r\pi}{q}\Big) f\Big(\frac{2\pi}{q}\Big) - \Big(\cos\frac{2r\pi}{q} - \cos\frac{3r\pi}{q}\Big) f\Big(\frac{3\pi}{q}\Big) + \cdots \\
= & -\Big(1 - \cos\frac{r\pi}{q}\Big) f\Big(\frac{\pi}{q}\Big) + \Big(\cos\frac{r\pi}{q} - \cos\frac{2r\pi}{q}\Big)\Big[f\Big(\frac{\pi}{q}\Big) - f\Big(\frac{2\pi}{q}\Big)\Big] + \Big(\cos\frac{2r\pi}{q} - \cos\frac{3r\pi}{q}\Big)\Big[f\Big(\frac{2\pi}{q}\Big) - f\Big(\frac{3\pi}{q}\Big)\Big] + \cdots \\
& + \Big(\cos r\frac{q-1}{q}\pi - \cos r\pi\Big) f\Big(\frac{q-1}{q}\pi\Big) \\
= & -2\sin^2\frac{r\pi}{2q} f\Big(\frac{\pi}{q}\Big) + 2\sin\frac{r\pi}{2q}\sin\frac{3r\pi}{2q}\Big[f\Big(\frac{\pi}{q}\Big) - f\Big(\frac{2\pi}{q}\Big)\Big] + 2\sin\frac{r\pi}{2q}\sin\frac{5r\pi}{2q}\Big[f\Big(\frac{2\pi}{q}\Big) - f\Big(\frac{3\pi}{q}\Big)\Big] + \cdots \\
& + 2\sin\frac{r\pi}{2q}\sin\frac{2q-1}{2q} r\pi\, f\Big(\frac{q-1}{q}\pi\Big).
\end{aligned}$$

Daher können wir schreiben:

$$B_r = \frac{4q}{r^2\pi^2} \sin^2 \frac{r\pi}{2q} \Big\{ \Big[f(0) - f\Big(\frac{\pi}{q}\Big) \Big] \sin \frac{r\pi}{2q} + \Big[f\Big(\frac{\pi}{q}\Big) - f\Big(\frac{2\pi}{q}\Big) \Big] \sin \frac{3r\pi}{2q} + \cdots$$

$$+ \Big[f\Big(\frac{q-1}{q}\pi\Big) - f(\pi) \Big] \sin \frac{2q-1}{2q} r\pi \Big\}.$$

Wenn wir dagegen beachten, daß

$$-\cos r\frac{p-1}{q}\pi + 2\cos r\frac{p\pi}{q} - \cos r\frac{p+1}{q}\pi = 2\cos\frac{rp\pi}{q}\Big(1 - \cos\frac{r\pi}{q}\Big) = 4\sin^2\frac{r\pi}{2q}\cos\frac{rp\pi}{q},$$

so folgt eine weitere Darstellung für B_r. Es ist nämlich dann:

$$B_r = \frac{4q}{r^2\pi^2} \sin^2 \frac{r\pi}{2q} \Big\{ f(0) + 2f\Big(\frac{\pi}{q}\Big) \cos\frac{r\pi}{q} + 2f\Big(\frac{2\pi}{q}\Big) \cos\frac{2r\pi}{q} + \cdots$$

$$+ 2f\Big(\frac{q-1}{q}\pi\Big) \cos r\frac{q-1}{q}\pi + f(\pi)\cos r\pi \Big\}.$$

Wir erhalten das folgende **Resultat:**

Versteht man unter $f(0), f\left(\frac{\pi}{q}\right), f\left(\frac{2\pi}{q}\right), \ldots f(\pi)$ die Werte, die die im Intervall von 0 bis π stetige Funktion $f(x)$ in den Punkten $0, \frac{\pi}{q}, \frac{2\pi}{q}, \ldots \frac{p\pi}{q}, \ldots \frac{q-1}{q}\pi, \pi$ annimmt, so läßt sich diese Funktion $f(x)$ im bezeichneten Intervalle angenähert durch eine endliche trigonometrische Reihe darstellen von der Form:

$$f(x) = \frac{B_0}{2} + \sum_1^{l-1} B_r \cos rx,$$

wobei die Koeffizienten B die Form haben:

$$B_0 = \frac{1}{q}\Big\{ f(0) + 2\sum_1^{q-1} f\Big(\frac{p\pi}{q}\Big) + f(\pi) \Big\},$$

$$B_r = \frac{4q}{r^2\pi^2} \sin^2 \frac{r\pi}{2q} \Big\{ f(0) + 2\sum_1^{q-1} f\Big(\frac{p\pi}{q}\Big) \cos\frac{rp\pi}{q} + f(\pi)\cos r\pi \Big\}.$$

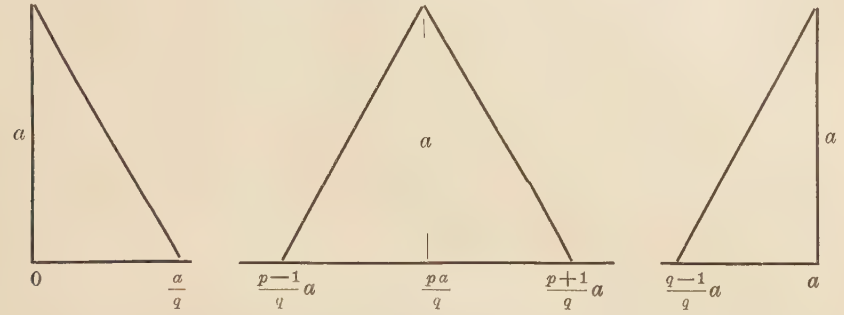
---

§ 8.

Verallgemeinerung der Borelschen Interpolationsformel.

Die Borelsche Funktion $\varphi_{pq}(x)$ war definiert worden unter der Voraussetzung, daß das vorgelegte Intervall $(0, a)$ in eine Anzahl, q, gleicher Teilintervalle zerlegt sei. Es stellt dann die Funktion $\varphi_{pq}(x)$ eine gebrochene Linie dar, die nur in dem Intervalle von $\frac{p-1}{q}a$ bis $\frac{p+1}{q}a$ von Null verschieden ist und daselbst durch zwei gerade Linien dargestellt wird, wie die Figur zeigt.

Die Funktion $\varphi_{0q}(x)$ ist nur in dem Intervalle von 0 bis $\frac{a}{q}$ von Null verschieden und wird geometrisch dargestellt durch die Verbindungslinie der Punkte: $0, a$; $\frac{a}{q}, 0$. $\varphi_{qq}(x)$ dagegen ist in dem Intervalle von $\frac{q-1}{q}a$ bis a durch die gerade Linie, die die Punkte $\frac{q-1}{q}a, 0$ und a, a verbindet, als von Null verschieden dargestellt



Wir wollen jetzt die Annahme äquidistanter Punkte fallen lassen und die Borelsche Funktion allgemeiner definieren.

Sei (a, b) das vorgelegte Intervall. Dann zerlegen wir dasselbe in eine Anzahl Teilintervalle, die eine vorgeschriebene Länge δ nicht überschreiten mögen und begrenzt seien durch die Punkte:

$$a \leqq x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n \leqq b.$$

Dabei sei also:

$$|x_r - x_{r+1}| \leqq \delta.$$

Dann wollen wir folgende im Intervalle (a, b) stetigen Funktionen $\varphi_{x_r}(x)$ definieren:

Es sei:

$$\varphi_{x_r}(x) = (b-a)\frac{x - x_{r-1}}{x_r - x_{r-1}} \quad \text{für} \quad x_{r-1} \leqq x \leqq x_r;$$

$$\varphi_{x_r}(x) = -(b-a)\frac{x - x_{r+1}}{x_{r+1} - x_r} \quad \text{für} \quad x_r \leqq x \leqq x_{r+1};$$

$$\varphi_{x_r}(x) = 0 \quad \text{für} \quad a \leqq x \leqq x_{r-1} \quad \text{und für} \quad x \geqq x_{r+1}.$$

In den Grenzintervallen $\overline{x_0 x_1}$ und $\overline{x_{n-1} x_n}$ wollen wir die Funktion $\varphi(x)$ etwas modifizieren, und zwar sei:
für das Intervall von x_0 bis x_1:

$$\varphi_{x_0}(x) = -(b-a)\cdot\frac{x - x_1}{x_1 - x_0} \qquad \text{für } x_0 \leqq x \leqq x_1;$$

$$\varphi_{x_0}(x) = 0 \qquad \text{für } x \geqq x_1 \text{ und } x < x_0.$$

Im Intervalle von x_{n-1} bis x_n definieren wir folgendermaßen:

$$\varphi_{x_n}(x) = (b-a)\frac{x-x_{n-1}}{x_n-x_{n-1}} \quad \text{für } x_{n-1} \leqq x \leqq x_n;$$

$$\varphi_{x_n}(x) = 0 \quad \text{für } x \leqq x_{n-1} \text{ und } x > x_n.$$

Die geometrische Deutung der Funktionen $\varphi(x)$ ist ohne weiteres ersichtlich. Diese eben definierten stetigen Funktionen lassen sich zur Darstellung vorgelegter stetiger Funktionen ebenso verwenden, wie die von Borel für das Intervall (0, 1) und für äquidistante Punkte definierten Funktionen $\varphi_{pq}(x)$. Setzt man nämlich:

$$\Phi_n = \frac{1}{b-a}\sum_{0,1,\ldots n} f(x_r)\varphi_{x_r}(x),$$

so folgt die gleichmäßig konvergierende Entwicklung:

$$f(x) = \Phi_1 + \sum_{2}^{\infty n}(\Phi_n - \Phi_{n-1}).$$

Im übrigen ist der Beweis genau so zu führen, wie es Borel getan hat. Man gelangt damit zu dem **Resultat:**

Jede in einem Intervall (a, b) vorgelegte stetige Funktion $f(x)$ läßt sich in die folgende in dem gegebenen Intervall, mit Ausschluß der Grenzpunkte a und b etwa, gleichmäßig konvergierende Reihe entwickeln:

$$f(x) = \Pi_1(x) + \sum_{n=2}^{n=\infty}\Big(\Pi_n(x) - \Pi_{n-1}(x)\Big),$$

wobei gesetzt ist:

$$\Pi_n(x) = \frac{1}{b-a}\sum_{0,1,\ldots n} f(x_r)\,P_{x_r}(x).$$

und

$$|\varphi_{x_r}(x) - P_{x_r}(x)| < \frac{1}{\delta^2}.$$

§ 9.

Zusammenhang der Borelschen Methode der Darstellung stetiger Funktionen mit den von anderen Autoren angewandten Methoden.

Den Gegenstand der vorangehenden Betrachtungen bildete das Problem, mit Hilfe der Interpolationstheorie vorgelegte stetige Funktionen durch eine Summe von Polynomen darzustellen. Wie in der Einleitung schon bemerkt wurde, ist das letztere Problem schon mit

Hilfe anderer Methoden*) gelöst werden. Es sollen nun die Beziehungen zwischen den in den angegebenen Arbeiten befolgten Methoden und der in vorliegender Arbeit angewandten Methode hergestellt werden.

Die Grundlage unserer Untersuchungen bildet die Funktion:

$$(1) \qquad \Pi_q(x) = \frac{1}{a} \sum_{p=0}^{p=q} f\left(\frac{p\,a}{q}\right) \varphi_{pq}(x).$$

Setzen wir:

$$(2) \qquad y = \Pi_q(x),$$

so folgt, daß diese Funktion im Intervalle von $x = \frac{p\,a}{q}$ bis $x = \frac{p+1}{q} a$ den folgenden Wert besitzt:

$$(3) \qquad y = \frac{1}{a} f\left(\frac{p\,a}{q}\right)[-qx + (p+1)\,a] + \frac{1}{a} f\left(\frac{p+1}{q}\right)[qx - p\,a],$$

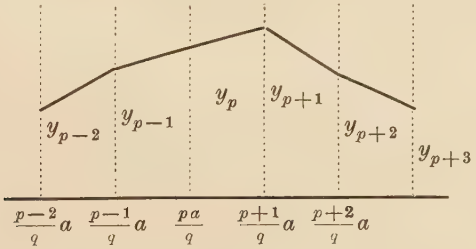
oder, wenn wir setzen:

$$(4) \qquad y_r = f\left(\frac{r\,a}{q}\right),$$

den Wert:

$$(5) \qquad y = \frac{q}{a}(y_{p+1} - y_p)\left(x - \frac{p\,a}{q}\right) + \frac{1}{a} y_p;$$

d. h. im Intervalle $\left(\frac{p\,a}{q}, \frac{p+1}{q} a\right)$ stellt die Funktion die Verbindungslinie der beiden Punkte: $\left(\frac{p\,a}{q}, y_p\right)\left(\frac{p+1}{q} a, y_{p+1}\right)$ dar.



Es folgt also der **Lehrsatz:**

Die Borelsche Funktion:

$$y = \frac{1}{a} \sum_{p=0}^{p=q} f\left(\frac{p\,a}{q}\right) \varphi_{p+1}(x)$$

stellt die polygonale Linie dar, welche aus den geraden Verbindungslinien der Punkte:

$$\frac{p\,a}{q}, y_p; \quad \frac{p+1}{q} a, y_{p+1}$$

besteht.

*) Siehe die in der Einleitung angegebenen Arbeiten von Runge, Volterra, Lerch, Mittag-Leffler, Lebesgue.

Damit sind wir nun aber zu dem Problem gelangt, welches die Grundlage der Arbeiten von Runge, Volterra, Lerch, Mittag-Leffler, Lebesgue u. a. bildet und haben im vorangegangenen eine weitere Lösung desselben gefunden.

Insbesondere soll jetzt gezeigt werden, daß die Methode von Lerch genau mit der von Borel übereinstimmt, nur daß hier der allgemeinere Fall nicht äquidistanter Punkte vorliegt, wie er im letzten Paragraphen behandelt worden ist.

Lerch verfährt folgendermaßen.

Mit Hilfe der beiden Formeln:

$$\frac{1}{2} - x = \sum_{\mu=1}^{\infty} \frac{\sin 2\mu x\pi}{\mu\pi} \qquad (0 < x < 1)$$

und

$$x^2 - x + \frac{1}{6} = \sum_{\mu=1}^{\infty} \frac{\cos 2\mu\pi x}{\mu^2\pi^2} \qquad (0 \leqq x \leqq 1)$$

läßt sich zeigen, daß unter der Annahme:

$$0 \leqq x_1 \leqq x_2 \leqq 1$$

der Ausdruck:

$$L\left(x \middle| \begin{matrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{matrix}\right) = \frac{1}{2}(x_2 - x_1)(y_2 + y_1) + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{y_1 \sin 2\nu\pi(x - x_1) - y_2 \sin 2\nu\pi(x - x_2)}{\nu\pi}$$

$$- \frac{1}{2} \cdot \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\cos 2\nu\pi(x - x_1) - \cos 2\nu\pi(x - x_2)}{\nu^2\pi^2}$$

die lineare Funktion

$$y_1 + \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

darstellt, wenn sich die Variable x innerhalb des Intervalles (x_1, x_2) befindet, während sie gleich 0 wird für außerhalb des Intervalles (x_1, x_2), aber innerhalb des Intervalles (0, 1) befindliche Punkte.

Seien nun: $x_0, x_1, \ldots x_n$ reelle Größen, die den Ungleichungen genügen:

(6) $$0 \leqq x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n \leqq 1$$

und denen die Größen entsprechen mögen: $y_0, y_1, y_2, \ldots y_{n-1}, y_n$.

Dann wird der Polygonzug

$$\overline{(x_0/y_0)(x_1/y_1)}\,\overline{(x_2/y_2)} \cdots \overline{(x_{n-1}/y_{n-1})}\,\overline{(x_n/y_n)} = L$$

durch folgende Summe dargestellt:

(7) $$y = L\left(x \middle| \begin{matrix} x_0 & x_1 & \cdots & x_n \\ y_0 & y_1 & \cdots & y_n \end{matrix}\right) = \sum_{0}^{n-1\alpha} L\left(x \middle| \begin{matrix} x_\alpha & x_{\alpha+1} \\ y_\alpha & y_{\alpha+1} \end{matrix}\right)$$

$$= \left[\frac{1}{2} - x + x_0\right] y_0 + \left[\frac{1}{2} - x_n + x\right] y_n + \frac{1}{2} \sum_{0}^{n-1\alpha} (y_{\alpha+1} + y_\alpha)(x_{\alpha+1} - x_\alpha)$$

$$+ \frac{1}{2} \sum_{1}^{\infty\nu} \frac{1}{\nu^2\pi^2} \sum_{0}^{n-1\alpha} \frac{y_{\alpha+1} - y_\alpha}{x_{\alpha+1} - x_\alpha} \left[\cos 2\nu\pi(x - x_{\alpha+1}) - \cos 2\nu\pi(x - x_\alpha)\right].$$

Läßt man nun x_0 mit 0 und x_n mit 1 zusammenfallen, so kann man unter der Annahme, daß $f(x)$ eine im Intervalle $(0 \ldots 1)$ stetige Funktion ist, $f(x)$ durch die Funktion $L_k(x)$ ersetzen, die man erhält, wenn man L nach k Gliedern z. B. abbricht. Der begangene Fehler ist dann kleiner als $\frac{2}{3}\delta$, wo δ willkürlich gewählt ist.

$L_k(x)$ kann nun in der folgenden Weise geschrieben werden:

$$(8)\quad L_k(x) = \Big[f(0) - f(1)\Big]\Big(\tfrac{1}{2} - x\Big) + A_0 + \sum_{\nu=1}^{\nu=k}\{A_\nu \cos \nu x + B_\nu \sin \nu x\},$$

wobei:

$$A_0 = x_0 y_0 - x_n y_n + \frac{1}{2}\sum_{\alpha=0}^{n-1}(y_\alpha + y_{\alpha+1})(x_{\alpha+1} - x_\alpha),$$

$$A_\nu = \frac{1}{2\nu^2\pi^2}\sum_{0}^{n-1}{}^{\alpha}\frac{y_{\alpha+1} - y_\alpha}{x_{\alpha+1} - x_\alpha}[\cos 2\nu\pi x_{\alpha+1} - \cos 2\nu\pi x_\alpha],$$

$$B_\nu = \frac{1}{2\nu^2\pi^2}\sum_{0}^{n-1}{}^{\alpha}\frac{y_{\alpha+1} - y_\alpha}{x_{\alpha+1} - x_\alpha}[\sin 2\nu\pi x_{\alpha+1} - \sin 2\nu\pi x_\alpha].$$

Daß dieses Resultat mit dem von Borel erhaltenen übereinstimmt, ist leicht zu sehen. Wir ordnen $L_k(x)$ nach den y_α, schreiben also L_k in der Form:

$$(9)\quad y = \sum_{0}^{n}{}^{\alpha} y_\alpha \psi_\alpha(x).$$

Der Faktor von y_α: $\psi_\alpha(x)$ ist dann gleich:

$$\psi_\alpha(x) = \frac{1}{2}(x_{\alpha+1} - x_{\alpha-1})$$
$$+ \frac{1}{2\pi^2}\sum_{1}^{k}{}^{\nu}\frac{1}{\nu^2}\left[\frac{\cos 2\nu\pi x_\alpha - \cos 2\nu\pi x_{\alpha-1}}{x_\alpha - x_{\alpha-1}} - \frac{\cos 2\nu\pi x_{\alpha+1} - \cos 2\nu\pi x_\alpha}{x_{\alpha+1} - x_\alpha}\right]\cos 2\nu\pi x$$
$$+ \frac{1}{2\pi^2}\sum_{1}^{k}{}^{\nu}\frac{1}{\nu^2}\left[\frac{\sin 2\nu\pi x_\alpha - \sin 2\nu\pi x_{\alpha-1}}{x_\alpha - x_{\alpha-1}} - \frac{\sin 2\nu\pi x_{\alpha+1} - \sin 2\nu\pi x_\alpha}{x_{\alpha+1} - x_\alpha}\right]\sin 2\nu\pi x.$$

Damit sind wir aber zu einer Reihe gekommen, wie wir sie im § 7 betrachtet haben, wenn wir annehmen, daß x_α $(\alpha = 1, 2, \ldots n-1)$ äquidistante Punkte im Intervall $x_0 = 0$ bis $x_n = 1$ sind.

Man kann ja ψ_α auch so schreiben:

$$\psi_\alpha(x) = \int_{x_{\alpha-1}}^{x_\alpha}\frac{x - x_{\alpha-1}}{x_\alpha - x_{\alpha-1}}dx + \int_{x_\alpha}^{x_{\alpha+1}}\frac{x_{\alpha+1} - x}{x_{\alpha+1} - x_\alpha}dx$$
$$+ 2\sum_{1}^{k}{}^{\nu}\left\{\int_{x_{\alpha-1}}^{x_\alpha}\frac{x - x_{\alpha-1}}{x_\alpha - x_{\alpha-1}}\cos 2\nu\pi x dx + \int_{x_\alpha}^{x_{\alpha+1}}\frac{x_{\alpha+1} - x}{x_{\alpha+1} - x_\alpha}\cos 2\nu\pi x dx\right\}\cos 2\nu\pi x$$
$$+ 2\sum_{1}^{k}{}^{\nu}\left\{\int_{x_{\alpha-1}}^{x_\alpha}\frac{x - x_{\alpha-1}}{x_\alpha - x_{\alpha-1}}\sin 2\nu\pi x dx + \int_{x_\alpha}^{x_{\alpha+1}}\frac{x_{\alpha+1} - x}{x_{\alpha+1} - x_\alpha}\sin 2\nu\pi x dx\right\}\sin 2\nu\pi x.$$

Hieraus folgt aber, daß:

$$\psi_\alpha(x) = \frac{x - x_{\alpha-1}}{x_\alpha - x_{\alpha-1}} \quad \text{für} \quad x_{\alpha-1} \leqq x \leqq x_\alpha,$$

$$\psi_\alpha(x) = -\frac{x - x_{\alpha+1}}{x_{\alpha+1} - x_\alpha} \quad \text{für} \quad x_\alpha \leqq x \leqq x_{\alpha+1}, \tag{10}$$

$$\psi_\alpha(x) = 0 \quad \text{für} \quad x \leqq x_{\alpha-1} \quad \text{und für} \quad x \geqq x_{\alpha+1}.$$

Diese Funktion $\psi_\alpha(x)$ stimmt also überein mit der im vorigen Paragraphen definierten Funktion, die wir als eine Verallgemeinerung der von Borel gegebenen bezeichnet haben.

Der Vollständigkeit halber soll auch noch $\psi_0(x)$ und $\psi_n(x)$ angegeben werden. Wir erhalten für den Koeffizienten von y_0 in $L_k(x)$ folgenden Ausdruck:

$$\psi_0(x) = \frac{1}{2} - x + \frac{x_0 + x_1}{2}$$
$$+ \frac{1}{2\pi^2} \sum_1^k{}^{\nu} \frac{1}{\nu^2} \left\{ \frac{\cos 2\nu\pi x_0 - \cos 2\nu\pi x_1}{x_1 - x_0} \cos 2\nu\pi x + \frac{\sin 2\nu\pi x_0 - \sin 2\nu\pi x_1}{x_1 - x_0} \sin 2\nu\pi x \right\}.$$

Zu diesen gelangt man aber auch, wenn man die Funktion:

$$\psi_0(x) = -\frac{x_1 - x}{x_1 - x_0} \tag{11}$$

in eine nach den Kosinus und Sinus fortschreitende Reihe entwickelt und dabei beachtet, daß die Reihe

$$\sum_1^\infty{}^{\nu} \frac{\sin 2\nu\pi x}{\nu\pi}$$

konvergiert unter der Annahme $0 < x < 1$ und den oben S. 48 gegebenen Wert hat.

Der Koeffizient $\psi_n(x)$ von y_n lautet:

$$\psi_n(x) = -\frac{1}{2} + x - \frac{x_n + x_{n-1}}{2}$$
$$+ \frac{1}{2\pi_2} \sum_1^k{}^{\nu} \frac{1}{\nu_2} \left\{ \frac{\cos 2\nu\pi x_n - \cos 2\nu\pi x_{n-1}}{x_n - x_{n-1}} \cos 2\nu\pi x + \frac{\sin 2\nu\pi x_n - \sin 2\nu\pi x_{n-1}}{x_n - x_{n-1}} \sin 2\nu\pi x \right\}.$$

Er stellt die trigonometrische Reihe dar, die man erhält, wenn man die Funktion:

$$\psi_n(x) = \frac{x - x_{n-1}}{x_n - x_{n-1}} \tag{12}$$

entwickelt und dabei ebenso die Grenze der Reihe $\sum_1^\infty{}^{\nu} \frac{\sin 2\nu\pi x}{\nu\pi}$ beachtet.

Es ergibt sich somit das folgende **Resultat:**

Eine jede im Intervalle von $x_0 = 0$ bis $x_n = 1$ definierte stetige Funktion $f(x)$ von x läßt sich in diesem Intervalle

durch die polygonale Linie L_k mit beliebig vorgeschriebener Annäherung approximieren, mit Ausnahme der Grenzpunkte x_0 und x_n, da in diesen die Reihen $\psi_0(x)$ resp. $\psi_n(x)$ aufhören, gleichmäßig zu konvergieren.

Der Polygonzug wird dargestellt durch die Gleichung (8) oder (9):

$$y = \sum_0^n{}_\alpha y_\alpha \psi_\alpha(x),$$

wobei die Funktionen $\psi_\alpha(x)$ die durch die Gleichungen (10) bez. (11), (12) gegebene Form haben.

Andere Arbeiten, die sich mit der Darstellung stetiger Funktionen befassen, beruhen auf folgender Grundlage.

Versteht man, wie vorher, unter $x_0 = a$, x_1, x_2, ... $x_n = b$ reelle Größen, so wird man eine im Intervalle (a, b) stetige gebrochene Linie $\varphi(x)$ definieren können durch den folgenden Ausdruck:

$$(13) \qquad \varphi(x) = \varphi_1(x) + \sum_p^{1,n} [\varphi_{p+1}(x) - \varphi_p(x)]\, \alpha\,(x_p - x),$$

wobei $\varphi_p(x)$ den Wert besitzt:

$$(14) \qquad \varphi_p(x) = y_{p-1} + \frac{x - x_{p-1}}{x_p - x_{p-1}}(y_p - y_{p-1})$$

und mit $\alpha(x)$ eine Funktion bezeichnet wird, die für $x > 0$ gleich Null ist, für $x \leq 0$ gleich 1. Ordnen wir die rechte Seite von $\varphi(x)$ nach y mit steigendem Index, so ist der Faktor von y_p der folgende Ausdruck:

$$15) \quad \frac{x - x_{p-1}}{x_p - x_{p-1}}\alpha(x_{p-1} - x) - \left[\frac{x - x_{p-1}}{x_p - x_{p-1}} + \frac{x - x_{p+1}}{x_{p+1} - x_p}\right]\alpha(x_p - x) + \frac{x - x_{p+1}}{x_{p+1} - x_p}\alpha(x_{p+1} - x).$$

Diese Funktion stimmt mit der im § 8 definierten Funktion überein, und wenn wir insbesondere setzen: $x_p = \frac{p}{q}$,

mit der Borelschen Funktion $\varphi_{pq}(x)$, gebildet für das Intervall von 0 bis 1.

Man wird nun mit Hilfe der Funktionen $\alpha(x)$ neue Funktionen $P_{pq}(x)$ aufstellen können, wie es in den angegebenen Arbeiten von Runge, Mittag, Leffler und Lebesgue geschehen ist.

Wir wollen insbesondere für $\alpha(x)$ die Funktion $\beta(x)$ setzen, die Lebesgue aufgestellt hat. Betrachten wir nämlich den Ausdruck:

$$x[1 - 2\alpha(x)],$$

so stellt dieser eine stetige Funktion von x dar und ist gleich dem absoluten Werte von x. Wir wollen diesen absoluten Wert von x mit $\sqrt{x^2}$ bezeichnen und $\sqrt{x^2}$ in eine Reihe entwickeln:

$$\sqrt{x^2} = (1+z)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}z - \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}z^2 + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}z^3 - + \cdots (-1)^{n+1}\cdot\frac{1\cdot 3\cdots 2n-3}{2\cdot 4\cdot 6\cdots 2n}z^n + R_n.$$

Diese Reihe konvergiert absolut und gleichmäßig für $-1 \leq z \leq 1$;

ersetzt man z durch $x^2 - 1$, so konvergiert die Reihe in x gleichmäßig zwischen -1 und $+1$. Man wird somit ein Polynom $P(x)$ derart bilden können, daß $|\sqrt{x^2} - P(x)| < \varepsilon$.

Ersetzen wir jetzt in obigem Faktor von y_p, also in (15), die Funktion $\alpha(x)$ durch die Funktion $\beta(x)$, wobei:

(16) $$\beta(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\frac{\sqrt{x^2}}{x},$$

so erhalten wir:

$$\frac{1}{2}\frac{1}{x_p - x_{p-1}} \cdot \sqrt{(x_{p-1} - x)^2} - \frac{x_{p+1} - x_{p-1}}{2(x_p - x_{p-1})(x_{p+1} - x_p)} \cdot \sqrt{(x_p - x)^2} + \frac{1}{2}\frac{1}{x_{p+1} - x_p} \cdot \sqrt{(x_{p+1} - x)^2},$$

oder, wenn wir die absoluten Werte in üblicher Weise bezeichnen, so ist dies gleich:

(17) $$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x_p - x_{p-1}} \cdot |x - x_{p-1}| - \frac{x_{p+1} - x_{p-1}}{2(x_p - x_{p-1})(x_{p+1} - x_p)} |x - x_p| + \frac{1}{2} \frac{1}{x_{p+1} - x_p} |x - x_{p+1}|.$$

Damit sind wir aber zu einer Darstellung der Borelschen Funktion gekommen, wie sie Potron[1]) auf Grund einer Formel von Bernstein[2]) benutzt hat, um einen allgemeinen Ausdruck für $P_{pq}(x)$ zu erhalten.

Anhang.

Tabelle der bei der Entwicklung nach Kugelfunktionen auftretenden Koeffizienten $c_n^{(pq)}$ für die Werte $n = 1$ bis $n = 6$ und für $q = 1$ bis $q = 7$.

$$P_n(x) = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots 2n-1}{n!}\left\{x^n - \frac{n(n-1)}{2 \cdot (2n-1)} x^{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2 \cdot 4 \cdot (2n-1)(2n-3)} x^{n-4} - \cdots\right\}$$

$$P_0(x) = 1,$$

$$P_1(x) = x,$$

$$P_2(x) = \frac{3}{2}\left\{x^2 - \frac{1}{3}\right\},$$

$$P_3(x) = \frac{5}{2}\left\{x^3 - \frac{3}{5}x\right\},$$

$$P_4(x) = \frac{35}{8}\left\{x^4 - \frac{6}{7}x^2 + \frac{3}{35}\right\},$$

$$P_5(x) = \frac{63}{8}\left\{x^5 - \frac{10}{9}x^3 + \frac{5}{21}x\right\},$$

$$P_6(x) = \frac{231}{16}\left\{x^6 - \frac{15}{11}x^4 + \frac{5}{11}x^2 - \frac{5}{231}\right\},$$

$$P_7(x) = \frac{429}{16}\left\{x^7 - \frac{21}{13}x^5 + \frac{105}{143}x^3 - \frac{35}{429}x\right\},$$

$$P_8(x) = \frac{6435}{64}\left\{x^8 - \frac{28}{15}x^6 + \frac{14}{13}x^4 - \frac{28}{143}x^2 + \frac{7}{1287}\right\},$$

$$P_9(x) = \frac{36465}{128}\left\{x^9 - \frac{36}{17}x^7 + \frac{63}{85}x^5 - \frac{84}{221}x^3 + \frac{63}{2431}x\right\},$$

$$P_{10}(x) = \frac{46189}{256}\left\{x^{10} - \frac{45}{19}x^8 + \frac{630}{323}x^6 + \frac{210}{323}x^4 + \frac{315}{4199}x^2 - \frac{7}{46189}\right\}.$$

1) Potron, Sur une formule générale d'interpolation. Bulletin de la Société mathématique de France, t. 34 (1906) p. 52.

2) S. Bernstein, Sur l'interpolation. Bulletin de la Soc. etc., t. 33 (1905) p. 33.

$$c_n^{(p\,q)} = (2n+1)\,a \sum_0^r \frac{P_n^{(2r)}\left(\frac{p\,a}{q}\right)}{2r+2!}\left(\frac{a}{q}\right)^{2r+1} \qquad a=1$$

$$c_1^{(p\,q)} = \frac{3}{2}\cdot\frac{p}{q^2},$$

$$c_2^{(p\,q)} = \frac{1}{8}\cdot\frac{1}{q^3}\left\{30p^2-(2q^2-1)5\right\},$$

$$c_3^{(p\,q)} = \frac{1}{8}\cdot\frac{1}{q^4}\left\{70p^3-7(6q^2-5)p\right\},$$

$$c_4^{(p\,q)} = \frac{1}{16}\cdot\frac{1}{q^5}\left\{315p^4-45(6q^2-7)p^2+3(9q^4-15q^2+7)\right\},$$

$$c_5^{(p\,q)} = \frac{1}{16}\cdot\frac{1}{q^6}\left\{693p^5-385(2q^2-3)p^3+(15q^4-35q^2+21)p\right\},$$

$$c_6^{(p\,q)} = \frac{1}{128}\cdot\frac{1}{q^7}\left\{\begin{array}{c}12012p^6-2730(6q^2-11)p^4+1092(5q^4-15q^2+11)p^4\\ -13(20q^6-70q^4+84q^2-33)\end{array}\right\}$$

$$c_7^{(p\,q)} = \frac{15}{128}\cdot\frac{1}{q^8}\left\{\begin{array}{c}1716p^7-(2772q^2-6006)p^5+(1260q^4-4620q^2+4004)p^3\\ -(140q^6-630q^4+9249q^2-429)p\end{array}\right\}$$

$c_2^{(p\,q)}$		$p=1$	$p=2$	$p=3$	$p=4$	$p=5$	$p=6$	$p=7$
$q=2$	$\frac{30p^2-35}{64}$	$-\frac{5}{64}$						
$q=3$	$\frac{30p^2-85}{216}$	$-\frac{55}{216}$	$\frac{35}{216}$					
$q=4$	$\frac{30p^2-155}{512}$	$-\frac{125}{512}$	$-\frac{35}{512}$	$\frac{115}{512}$				
$q=5$	$\frac{6p^2-49}{200}$	$-\frac{43}{200}$	$-\frac{1}{8}$	$\frac{1}{40}$	$\frac{47}{200}$			
$q=6$	$\frac{30p^2-355}{1728}$	$-\frac{325}{1728}$	$-\frac{235}{1728}$	$-\frac{85}{1728}$	$\frac{125}{1728}$	$\frac{395}{1728}$		
$q=7$	$\frac{30p^2-485}{2744}$	$-\frac{455}{2744}$	$-\frac{365}{2744}$	$-\frac{215}{2744}$	$-\frac{5}{2744}$	$\frac{265}{2744}$	$\frac{595}{2744}$	

$c_3^{(p\,q)}$		$p=1$	$p=2$	$p=3$	$p=4$	$p=5$	$p=6$	$p=7$
$q=2$	$\frac{70p^3-133p}{128}$	$-\frac{63}{128}$						
$q=3$	$\frac{70p^3-343p}{648}$	$-\frac{91}{216}$	$-\frac{7}{36}$					
$q=4$	$\frac{70p^3-637p}{2048}$	$-\frac{567}{2048}$	$-\frac{714}{2048}$	$-\frac{21}{2048}$				
$q=5$	$\frac{70p^3-1015p}{5000}$	$-\frac{189}{1000}$	$-\frac{294}{1000}$	$-\frac{231}{1000}$	$\frac{84}{1000}$			
$q=6$	$\frac{70p^3-1477p}{10368}$	$-\frac{1407}{10368}$	$-\frac{2394}{10368}$	$-\frac{2541}{10368}$	$-\frac{1428}{10368}$	$\frac{1365}{10368}$		
$q=7$	$\frac{70p^3-2023p}{19208}$	$-\frac{1953}{19208}$	$-\frac{3486}{19208}$	$-\frac{4179}{19208}$	$-\frac{3612}{19208}$	$-\frac{1365}{19208}$	$\frac{2982}{19208}$	

$c_4^{(pq)}$		$p=1$	$p=2$	$p=3$	$p=4$	$p=5$	$p=6$	$p=7$
$q=2$	$\frac{315p^4-765p^2+273}{512}$	$-\frac{177}{512}$						
$q=3$	$\frac{315p^4-2115p^2+1803}{3888}$	$\frac{3}{3888}$	$-\frac{539}{1296}$					
$q=4$	$\frac{315p^4-4005p^2+6213}{16384}$	$\frac{2523}{16384}$	$-\frac{4767}{16384}$	$-\frac{4317}{16384}$				
$q=5$	$\frac{315p^4-6435p^2+15771}{50000}$	$\frac{9651}{50000}$	$-\frac{4929}{50000}$	$-\frac{16629}{50000}$	$-\frac{6549}{50000}$			
$q=6$	$\frac{315p^4-9405p^2+33393}{124416}$	$\frac{24303}{124416}$	$-\frac{813}{124416}$	$-\frac{25737}{124416}$	$-\frac{36447}{124416}$	$-\frac{4857}{124416}$		
$q=7$	$\frac{315p^4-12915p^2+62643}{268912}$	$\frac{50043}{268912}$	$-\frac{16023}{268912}$	$-\frac{28077}{268912}$	$-\frac{63357}{268912}$	$-\frac{63357}{268912}$	$-\frac{5943}{268912}$	

$c_5^{(pq)}$		$p=1$	$p=2$	$p=3$	$p=4$	$p=5$	$p=6$	$p=$
$q=2$	$\frac{693p^5-1925p^3+1331p}{1024}$	$-\frac{99}{1024}$						
$q=3$	$\frac{693p^5-5775p^3+10131p}{11664}$	$\frac{561}{1296}$	$-\frac{209}{648}$					
$q=4$	$\frac{693p^5-11165p^3+36311p}{65536}$	$\frac{25839}{65536}$	$\frac{2739}{32768}$	$-\frac{24123}{65536}$				
$q=5$	$\frac{693p^5-18095p^3+93731p}{250000}$	$\frac{72329}{250000}$	$\frac{36439}{125000}$	$\frac{38979}{250000}$	$-\frac{18381}{62500}$			
$q=6$	$\frac{693p^5-26565p^3+200211p}{250000}$	$\frac{174339}{250000}$	$\frac{105039}{125000}$	$\frac{51777}{250000}$	$-\frac{47421}{62500}$	$\frac{30789}{50000}$		
$q=7$	$\frac{693p^5-36575p^3+377531p}{1882384}$	$\frac{341649}{1882384}$	$\frac{242319}{941192}$	$\frac{313467}{1882384}$	$-\frac{30261}{470596}$	$-\frac{518595}{1882384}$	$-\frac{123123}{941192}$	

$c_6^{(pq)}$		$p=1$	$p=2$	$p=3$	$p=4$	$p=5$
$q=2$	$\frac{12012p^6-35490p^4+41496p^2-6019}{16384}$	$\frac{11999}{16384}$				
$q=3$	$\frac{4004p^6-39130p^4+102284p^2-41743}{93312}$	$\frac{25415}{93312}$	$-\frac{2431}{93312}$			
$q=4$	$\frac{12012p^6-232050p^4+1147692p^2-849043}{2097152}$	$\frac{78611}{2097152}$	$\frac{797693}{2097152}$	$-\frac{559117}{2097152}$		
$q=5$	$\frac{12012p^6-379470p^4+3015012p^2-3520595}{10000000}$	$\frac{873041}{10000000}$	$\frac{3236701}{10000000}$	$\frac{1634191}{10000000}$	$\frac{3223571}{10000000}$	
$q=6$	$\frac{6006p^6-279825p^4+3249246p^2-5475600}{17915504}$	$\frac{2500173}{17915904}$	$\frac{3428568}{17915904}$	$\frac{5480163}{17915904}$	$\frac{522288}{17915904}$	$\frac{526632}{1791590}$
$q=7$	$\frac{12012p^6-772590p^4+12318852p^2-28456909}{105413504}$	$\frac{16898635}{105413504}$	$\frac{9225827}{105413504}$	$\frac{28589717}{105413504}$	$\frac{20062835}{105413504}$	$\frac{1566685}{1054135}$

$$\left.\begin{matrix} p=6 \\ q=7 \end{matrix}\right\}: -\frac{25823005}{105413504}.$$

Die Anregung zu der vorliegenden Arbeit erhielt ich von Herrn Geh. Hofrat Prof. Dr. M. Krause.

Hierfür, sowie für das rege Interesse und die liebenswürdige Unterstützung bei der Abfassung der Arbeit, drängt es mich, Herrn Geheimrat Krause auch hierdurch meinen herzlichsten Dank auszusprechen.

Lebenslauf.

Ich, Hermann Paul Lehmann, evangelisch-lutherischer Konfession, wurde am 10. September 1884 zu Dresden geboren. Nach dreijährigem Besuche der höheren Volksschule zu Plauen bei Dresden besuchte ich von Ostern 1894 bis Ostern 1903 die Annenschule (Realgymnasium) in Dresden und erwarb das Reifezeugnis. Ich wandte mich sodann dem Studium der Reinen und Angewandten Mathematik und Physik zu und wurde zu diesem Zwecke Ostern 1903 an der Königl. Technischen Hochschule zu Dresden immatrikuliert. Hier arbeitete ich vor allem im Mathematischen Seminare des Herrn Geh. Hofrats Prof. Dr. M. Krause. Von Michaelis 1907 bis Michaelis 1908 gehörte ich der Universität Halle-Wittenberg als Studierender an. Nachdem ich im Mai 1909 an der Königl. Technischen Hochschule zu Dresden die Prüfung für Kandidaten des höheren Lehramts bestanden hatte, war ich von Mitte Juni ab dem Königl. Gymnasium in Dresden-Neustadt zur Ablegung meines Probejahres zugewiesen. Das Examen rigorosum bestand ich am 11. November 1909.